

## ESTRATTO DELLA TESI DI LAUREA

**Titolo della Tesi:** “Teoria del Duopolio: Da Cournot a Kreps e Scheinkman”

Domenico Fanelli

Nella Tesi di Laurea è stata analizzata una linea teorica comprendente i modelli di *Cournot* (1838), di *Bertrand* (1883), di *Edgeworth* (1897) e di *Kreps-Scheinkman* (1983). Essi sono stati analizzati sia *da un punto di vista storico* che *da un punto di vista analitico*, utilizzando, in tal senso, un approccio imperniato sulla *Teoria dei Giochi*.

Anche se le due linee espositive sono strettamente connesse, l'evoluzione storica e l'elaborazione originaria di questi modelli è, in parte, differente dall'analisi moderna con la quale oggi si affronta il problema della concorrenza duopolistica: lo sviluppo della Teoria dei Giochi e l'elaborazione, nel 1951, del concetto di *equilibrio di Nash* ha infatti permesso una rivalutazione generale dei modelli oligopolistici antecedenti a questa data e, in particolare, una rielaborazione dei lavori originari di Cournot, di Bertrand e di Edgeworth.

Per ogni modello esposto è stata quindi analizzata sia la sua versione originaria che una versione rielaborata, rappresentando il modello come un gioco non cooperativo in forma strategica, dove si utilizza il concetto di equilibrio di Nash per individuare i risultati di equilibrio della concorrenza tra le imprese. Nelle versioni rielaborate sono state impiegate le stesse funzioni di domanda e di costo<sup>1</sup> al fine di confrontare facilmente i risultati nei diversi modelli analizzati.

Nella *versione rielaborata del modello di Cournot* le imprese competono utilizzando le quantità come variabile strategica (*concorrenza sulle quantità*). Ognuna di esse sceglie, indipendentemente e simultaneamente, una data quantità di bene omogeneo, ottenendo, in equilibrio, dei profitti variabili positivi. Il prezzo di equilibrio è infatti superiore ai costi marginali ed è determinato direttamente dal mercato. Dal punto di vista della Teoria dei Giochi, questo modello si adatta perfettamente al *lavoro originario di Cournot* (cfr. Cournot, 1838, 1897, 1981); per determinare il risultato della concorrenza tra le imprese, Cournot utilizza infatti un concetto di equilibrio che rispecchia fedelmente la definizione dell'equilibrio di Nash: in corrispondenza delle quantità di equilibrio, ogni impresa massimizza i propri profitti, data la migliore altrui scelta. Per ottenere questa configurazione di equilibrio, Cournot risolve un sistema di equazioni costituito dalle *funzioni di reazione* delle due imprese, dove esse rappresentano rispettivamente le regole con cui ogni impresa individua il livello produttivo che gli permette di massimizzare i suoi profitti, data la quantità

---

<sup>1</sup> Nelle rielaborazioni dei modelli esposti si impegnano funzioni di domanda e di costo lineari.

prodotta dall'impresa rivale. Dopo aver determinato la coppia delle quantità di equilibrio, Cournot mostra come il risultato di equilibrio sia rappresentato graficamente dal punto di intersezione delle funzioni di reazione delle due imprese. L'equilibrio di Cournot costituisce quindi l'elaborazione primitiva del noto equilibrio di Nash, definito, per questo motivo, *equilibrio di Cournot-Nash*.

Nella *versione rielaborata del modello di Bertrand*, ogni impresa sceglie invece, simultaneamente e indipendentemente, i propri prezzi di vendita (*concorrenza sui prezzi*), e, in base ad essi, produce e vende una quantità di bene omogeneo pari alla domanda che le viene richiesta; essa è pari alla domanda totale del mercato quando l'impresa pratica un prezzo inferiore al prezzo adottato dall'impresa rivale, è nulla quando il prezzo adottato è superiore al prezzo della rivale ed è pari a metà della domanda di mercato quando entrambe le imprese adottano lo stesso prezzo di vendita<sup>2</sup>. Con queste assunzioni, il modello di Bertrand ammette un unico equilibrio di Nash (in strategie pure), in corrispondenza del quale ogni impresa pratica un prezzo uguale al costo marginale, ottiene profitti variabili di equilibrio nulli e vende una quantità del bene superiore alla quantità di equilibrio venduta nel modello di Cournot (c.d. *paradosso di Bertrand*<sup>3</sup>). Questa è almeno l'interpretazione prevalente del *lavoro originario di Bertrand* (cfr. Bertrand, 1883, 1981, 1988). Esso è stato infatti oggetto di molteplici interpretazioni<sup>4</sup> dovute, probabilmente, al fatto che il lavoro di Bertrand (1883), differentemente dal lavoro di Cournot (1838), risulta privo di qualsiasi formalizzazione matematica. Da un punto di vista storico, l'elaborazione del lavoro di Bertrand, oltre a fornire un metodo alternativo per analizzare la concorrenza tra le imprese (concorrenza sui prezzi), si inserisce infatti in una critica più generalizzata riguardo alla necessità o meno dell'applicazione della matematica all'economia politica.

Il risultato di equilibrio che generalmente si associa al modello di Bertrand (paradosso di Bertrand) è, in realtà, strettamente connesso ad alcune delle sue assunzioni; una di esse è, ad esempio, la *dimensione delle capacità produttive*: nel modello di Bertrand si assume che entrambe le imprese abbiano una capacità produttiva tale da poter soddisfare singolarmente l'intero mercato, al prezzo più basso economicamente rilevante (il costo marginale). Modificando quest'assunzione si ottiene un diverso risultato di equilibrio e si evita il c.d. paradosso di Bertrand. Se si suppone, ad esempio, che, in corrispondenza del prezzo di equilibrio (il costo marginale), una delle due imprese non sia in

---

<sup>2</sup> Per motivi di semplicità assumiamo che la domanda sia, in questo caso, egualmente ripartita tra le due imprese: tale suddivisione del mercato è tuttavia solo una delle possibili alternative (cfr. Tasnàdi, 1999; Chowdhury, 2004).

<sup>3</sup> Sebbene il mercato sia costituito unicamente da due imprese concorrenti, dotate entrambe di un certo potere di mercato, l'intensità della concorrenza sui prezzi (*concorrenza alla Bertrand*), differentemente dalla concorrenza sulle quantità (*concorrenza alla Cournot*), comporta gli stessi risultati di un mercato concorrenziale, dove si assume invece un numero molto elevato di imprese prive di qualsiasi potere di mercato.

<sup>4</sup> Per una rassegna delle interpretazioni della versione originaria del modello di Bertrand vedi: Friedman (1977: pp. 38-9; 1983: pp. 46-8), de Bornier (1992: pp. 631-34), Morrison (1998), Dimand e Dore Mohammed (1999), Schumpeter (1954: p. 982, p. 982: nota 31).

grado si soddisfare singolarmente l'intera domanda del mercato, all'altra impresa converrà adottare un prezzo di vendita superiore al prezzo di equilibrio; l'impresa che pratica un prezzo pari al costo marginale non riuscirà infatti a soddisfare le richieste del mercato, lasciando, di conseguenza, una quota di domanda insoddisfatta che verrà invece servita dall'impresa che pratica il prezzo più elevato. In questo contesto, si inserisce il *modello di Edgeworth* (cfr. Edgeworth, 1897, 1925).

Nelle *versioni rielaborate del modello di Edgeworth* si assume che entrambe le imprese siano soggette ad una capacità produttiva che non le permette di soddisfare l'intera domanda di mercato per dei livelli di prezzo superiori al costo marginale. L'unica assunzione che caratterizza e distingue il modello di Edgeworth dal modello di Bertrand risulta quindi essere l'esistenza di *vincoli alla capacità produttiva*. A causa dei vincoli alla capacità produttiva, l'impresa che pratica il prezzo inferiore potrebbe non riuscire a soddisfare interamente le richieste del mercato, lasciando una quota di domanda insoddisfatta che verrebbe invece servita dall'impresa che pratica il prezzo più elevato, entro i limiti della sua capacità produttiva. Per determinare il risultato di equilibrio è quindi necessario introdurre una specifica *regola di razionamento della domanda* attraverso la quale sia possibile individuare la *domanda residuale* che si rivolge all'impresa che pratica il prezzo superiore. Le regole di razionamento più note<sup>5</sup> sono la *regola del razionamento proporzionale* (*proportional rationing rule*) e la *regola del razionamento efficiente* (*surplus-maximizing rule*). Questa distinzione<sup>6</sup> è rilevante in quanto al variare della regola utilizzata si modifica la domanda residuale dell'impresa che pratica il prezzo più elevato, e si ottengono, di conseguenza, risultati di equilibrio differenti.

Nelle *versioni rielaborate del modello di Edgeworth sia a razionamento proporzionale che a razionamento efficiente* esiste sia un *equilibrio di Nash in strategie pure* che un *equilibrio di Nash in strategie miste* a seconda dei livelli di capacità posseduti dalle due imprese. L'insieme delle coppie di capacità produttiva detenute dalle due imprese si può quindi ripartire in due sottoinsiemi che si modificano a seconda della regola di razionamento adottata: l'insieme entro il quale esiste un equilibrio di Nash in strategie pure (c.d. *regione delle strategie pure*) e l'insieme nel quale esiste invece un equilibrio di Nash in strategie miste (c.d. *regione delle strategie miste*).

In un modello *a razionamento proporzionale* si ha un equilibrio di Nash in strategie pure quando la somma delle capacità produttive detenute dalle due imprese è inferiore alla quantità domandata dal mercato in corrispondenza del prezzo di monopolio; in un modello *a razionamento efficiente* si ha

---

<sup>5</sup> Nella maggior parte dei testi analizzati vengono espone esclusivamente la regola del razionamento proporzionale e la regola del razionamento efficiente (cfr. Shubik, 1980: pp. 181-5; Tirole, 1995: pp. 364-6; Vives, 2001: pp. 124-6; Wolfstetter, 2002: pp. 122-4). E' tuttavia necessario evidenziare come vi siano molte altre possibili regole di razionamento oltre a quelle analizzate (cfr. Davidson e Deneckere 1986: p. 407; Tasnadi, 1999: pp. 354-5; Chowdhury, 2004: p. 3).

<sup>6</sup> Le differenze tra le due regole di razionamento sono state ampiamente trattate nella Tesi di Laurea (cfr. 4.2.2).

invece un equilibrio in strategie pure quando la capacità posseduta da ogni impresa è inferiore o eguale al livello in corrispondenza del quale essa massimizza i suoi profitti, data la capacità detenuta dall'impresa rivale. Nel caso del razionamento efficiente, la regione delle strategie pure è quindi delineata dalle funzioni di reazione tipiche di un modello alla Cournot, dove al posto delle quantità vi sono le capacità produttive possedute dalle due imprese.

Nelle regioni delle strategie pure delle due versioni del modello di Edgeworth, ogni impresa adotta lo stesso prezzo di equilibrio, che è quel prezzo in corrispondenza del quale ognuna di esse sfrutta pienamente le proprie capacità produttive, vendendo esattamente la massima quantità producibile. Il prezzo di equilibrio è quindi superiore al costo marginale e permette, ad entrambe le imprese, di ottenere dei profitti variabili di equilibrio positivi, evitando il c.d. paradosso di Bertrand.

Nella regione delle strategie pure di un modello a razionamento efficiente si possono quindi ottenere, come risultato della concorrenza sui prezzi, gli stessi risultati di equilibrio della concorrenza sulle quantità: nel punto di intersezione delle curve di reazione che delineano la regione delle strategie pure, ogni impresa possiede infatti un livello di capacità produttiva pari alla quantità di equilibrio venduta nel modello di Cournot; di conseguenza, in corrispondenza del punto di intersezione, ogni impresa, in equilibrio, sfrutta pienamente le proprie capacità produttive vendendo esattamente le quantità di equilibrio prodotte nel modello di Cournot e adottando lo stesso prezzo di vendita.

Quanto detto non avviene invece nel caso del razionamento proporzionale, dove la regione delle strategie pure è un sottoinsieme della regione corrispondente a razionamento efficiente, che non comprende il punto di intersezione delle curve di reazione delle due imprese; la coppia delle quantità di equilibrio vendute nel modello di Cournot non appartiene quindi alla regione delle strategie pure, dove la massima quantità di equilibrio vendibile è sempre inferiore alla quantità di equilibrio complessivamente venduta nel modello di Cournot.

Da un punto di vista storico, i risultati del *lavoro originario di Edgeworth* (cfr. Edgeworth, 1897, 1925) non coincidono, in realtà, con i risultati di equilibrio visti in precedenza. Nel lavoro di Edgeworth si dimostra infatti l'inesistenza di una soluzione di equilibrio finale e si determina un intervallo dei prezzi entro il quale i prezzi di vendita adottati dai due produttori oscillano indefinitamente fra i due estremi. Edgeworth giunge a questi risultati in quanto analizza una *particolare* situazione di mercato dove le imprese concorrenti sono entrambe vincolate ad *una determinata capacità produttiva che appartiene alla regione delle strategie miste*. Il concetto di equilibrio, utilizzato da Edgeworth per individuare l'eventuale soluzione finale, è simile al concetto dell'equilibrio di Nash in strategie pure, ma differisce nettamente dal concetto di equilibrio di Nash

in strategie miste; di conseguenza, soltanto se egli avesse assunto, per entrambe le imprese, dei livelli di capacità produttiva appartenenti alla regione delle strategie pure, sarebbe probabilmente riuscito ad individuare la soluzione di equilibrio. Egli tuttavia non ebbe, probabilmente, nessun interesse ad analizzare i risultati ottenibili assumendo diversi livelli di capacità produttiva, in quanto lo scopo della sua analisi lo aveva già pienamente raggiunto dimostrando l'indeterminatezza dell'equilibrio; il motivo principale che spinse Edgeworth ad elaborare il suo modello duopolistico era infatti quello di contrastare la fondatezza della soluzione di equilibrio individuata da Cournot, e, più in generale, di trovare una giustificazione all'idea che l'equilibrio nei mercati oligopolistici fosse indeterminato. A sua volta, la volontà di dimostrare l'indeterminatezza dell'equilibrio portò Edgeworth ad individuare inconsapevolmente un'intervallo dei prezzi strettamente connesso all'intervallo dei prezzi entro il quale si può determinare un equilibrio di Nash in strategie miste (cfr. Polo, 1993: p. 82).

In ogni caso, il lavoro di Edgeworth ha rappresentato uno dei contributi essenziali nel successivo sviluppo della Teoria dell'oligopolio; Edgeworth fu infatti il primo ad introdurre l'elemento dei vincoli produttivi nell'analisi della concorrenza duopolistica e ad elaborare la regola del razioneamento proporzionale della domanda (cfr. Vives, 1993: p. 446; 2001: p. 124). Grazie al lavoro di Levitan e Shubik (1972), il modello di Edgeworth venne successivamente rielaborato adottando la regola del razioneamento efficiente.

L'introduzione dei vincoli produttivi (cfr. Edgeworth, 1897) e l'utilizzo del razioneamento efficiente (cfr. Levitan e Shubik, 1972) costituiscono, a loro volta, gli elementi fondamentali del *modello di Kreps e Scheinkman* (cfr. Kreps e Scheinkman, 1983).

Nel *modello di Kreps e Scheinkman* la concorrenza tra le imprese si realizza in due stadi successivi (*gioco capacità-prezzo*):

→ *nel primo stadio*, entrambe le imprese scelgono, indipendentemente e simultaneamente, la capacità produttiva alla quale saranno poi vincolate nello stadio successivo del gioco, dove tale vincolo produttivo determina, ovviamente, i costi di installazione della capacità produttiva desiderata;

→ *nel secondo stadio*, dopo aver adottato la propria capacità produttiva ed essere venute a conoscenza della capacità installata dall'impresa rivale, ogni impresa sceglie, simultaneamente e indipendentemente, il proprio prezzo di vendita; determinando, di conseguenza, la domanda di mercato che ogni impresa potrà soddisfare nei limiti della propria capacità produttiva.

La *caratteristica distintiva* del modello di Kreps e Scheinkman consiste quindi nella possibilità per le imprese di scegliere la propria capacità produttiva, dove essa rappresenta, di conseguenza, una

variabile strategica posseduta dalle imprese e non un dato del modello come invece si suppone nelle rielaborazioni del lavoro di Edgeworth.

Al fine di individuare un equilibrio che sia valido nei due stadi del gioco, Kreps e Scheinkman (K-S) ricercano un *equilibrio perfetto nei sottogiochi* (*subgame perfect equilibrium*) utilizzando il *metodo dell'induzione a ritroso* (*backward induction*): in tal senso, la soluzione di equilibrio, individuata da K-S, è un equilibrio di Nash sia nei *sottogiochi di prezzo*<sup>7</sup> che nei *sottogiochi di capacità*<sup>8</sup>, dove:

→ ogni sottogioco di capacità è definibile come il gioco nel quale entrambe le imprese scelgono ed installano le proprie capacità produttive; e

→ ogni sottogioco di prezzo è definibile come il gioco competitivo di adozione dei prezzi che ogni impresa deve attuare dopo essere venuta a conoscenza della capacità produttiva scelta dall'impresa rivale; di conseguenza, nel gioco di K-S, i sottogiochi di prezzo coincidono esattamente con un gioco di Edgeworth a razionamento efficiente; nel modello di Edgeworth si assume infatti che entrambe le imprese siano soggette a determinate capacità produttive e che competano, scegliendo unicamente il proprio prezzo di vendita.

Analizzando in un primo momento i sottogiochi di prezzo e in un momento successivo i sottogiochi di capacità, K-S dimostrano come nel gioco capacità-prezzo esista un *unico equilibrio perfetto nei sottogiochi* che è un *equilibrio di Nash in strategie pure* e che coincide esattamente con l'*equilibrio di Cournot*.

Nei *sottogiochi di prezzo*, K-S ottengono ovviamente gli stessi risultati di un modello di Edgeworth a razionamento efficiente; si possono quindi delineare due diverse regioni di capacità produttiva<sup>9</sup>, dove ogni impresa ottiene dei ricavi attesi di equilibrio costanti che si modificano a seconda della regione analizzata.

Nei sottogiochi di prezzo, i costi di installazione della capacità produttiva non hanno alcuna influenza nell'individuazione dei risultati di equilibrio, ogni impresa deve infatti scegliere quel prezzo di vendita che gli permette di massimizzare il suo profitto, date le capacità produttive scelte nel primo stadio del gioco; i costi di installazione sono quindi dei costi fissi che non influenzano in alcun modo la massimizzazione dei profitti.

---

<sup>7</sup> Per indicare i sottogiochi di prezzo, Kreps e Scheinkman utilizzano il termine "the capacity-constrained subgames".

<sup>8</sup> Tale termine non viene utilizzato nel lavoro di Kreps e Scheinkman, tuttavia, l'utilizzo di tale termine non stravolge in alcun modo il significato o i risultati del loro lavoro.

<sup>9</sup> Nel modello di K-S si individuano, in realtà, tre insiemi di capacità produttiva: la regione delle strategie pure e due insiemi di capacità produttiva entro i quali esiste un equilibrio di Nash in strategie miste che si modifica, in modo simmetrico, a seconda dell'impresa che ha la capacità più elevata. Per motivi di semplicità trattiamo questi due insiemi come un'unica regione di capacità produttiva, definendola regione delle strategie miste. Ciò non modifica in alcun modo la comprensione dei risultati del modello.

Dopo aver determinato i ricavi di equilibrio nei sottogiochi di prezzo, K-S analizzano i *sottogiochi di capacità*, cercando le coppie di capacità produttiva in corrispondenza delle quali entrambe le imprese non hanno convenienza a modificare la propria scelta iniziale, sia nella scelta delle capacità produttive che nella scelta dei prezzi di vendita. Per far ciò essi impongono che i *profitti attesi ottenibili nei sottogiochi di capacità* siano composti dalla *differenza fra i ricavi attesi di equilibrio, ottenuti nei sottogiochi di prezzo, e i costi necessari per installare il vincolo produttivo desiderato*. Nella scelta del vincolo produttivo, i costi di installazione della capacità produttiva rappresentano quindi dei costi variabili in grado di influenzare direttamente gli esiti di questa fase del gioco. Con una dimostrazione estremamente complessa, K-S determinano infine il risultato di equilibrio e dimostrano l'esistenza di un unico equilibrio perfetto nei sottogiochi che coincide esattamente con l'equilibrio di Cournot. La complessità della loro dimostrazione, dovuta alla generalità delle funzioni utilizzate, può tuttavia essere evitata impiegando le funzioni di domanda e di costo assunte nelle rielaborazioni dei modelli precedenti (cfr. nota 1). *Con funzioni di domanda e di costo lineari siamo infatti in grado di conoscere esattamente i profitti che ogni impresa può ottenere nei sottogiochi di capacità e di costruire, di conseguenza, le funzioni di reazione delle due imprese*.

Nei sottogiochi di capacità, le funzioni di reazione delle due imprese si intersecano unicamente nella regione delle strategie pure delineata nei sottogiochi di prezzo. Si può quindi affermare che nel gioco di K-S esiste un unico equilibrio perfetto nei sottogiochi che è un equilibrio di Nash in strategie pure e che coincide esattamente con l'equilibrio di Cournot (con costi di produzione positivi). Nella regione delle strategie pure, le funzioni di reazione delle due imprese coincidono infatti con le funzioni di reazione di un modello alla Cournot con costi di produzione positivi, dove le quantità prodotte e vendute dalle imprese coincidono con le capacità produttive installate nel primo stadio del gioco e i costi di produzione equivalgono ai costi di installazione delle capacità produttive.

Se le imprese scelgono le proprie capacità produttive, prima di attuare una concorrenza sui prezzi, il prezzo di equilibrio che verrà adottato da entrambe le imprese coincide con il prezzo di equilibrio del modello di Cournot. In corrispondenza del prezzo di equilibrio ogni impresa riesce a vendere interamente la propria capacità produttiva e ad ottenere dei margini di guadagno positivi. Nel primo stadio del gioco, entrambe le imprese adottano infatti una ridotta capacità produttiva, in modo tale da limitare l'intensità della concorrenza sui prezzi che si realizzerà nel secondo stadio del gioco. L'adozione di ridotte capacità produttive è, a sua volta, dovuta ai costi di installazione della capacità produttiva: adottando un'elevata capacità produttiva, ogni impresa dovrebbe infatti sopportare dei costi di installazione elevati.

Se valgono tutte le assunzioni del modello di K-S, il modello di Cournot e il risultato che esso comporta, può essere interpretato in relazione alla sequenza temporale con la quale le imprese adottano le proprie decisioni riguardo al prezzo e alla capacità produttiva, dove la capacità di ogni impresa deve essere considerata come la quantità prodotta dall'impresa stessa. In tal senso il dibattito riguardo alla concorrenza sui prezzi e alla concorrenza sulle quantità perde di significato, dato che la possibilità di ottenere o meno il risultato di Cournot (profitti variabili di equilibrio positivi) dipende esclusivamente dall'ordine temporale con il quale le imprese prendono le proprie decisioni, e, quindi, dal momento in cui il vincolo produttivo viene adottato.

Per concludere, è necessario evidenziare come il risultato di K-S sia strettamente connesso a due assunzioni fondamentali:

- l'utilizzo della regola del razioneamento efficiente; e
- la possibilità delle imprese di conoscere il livello di capacità produttiva adottato dall'impresa rivale, prima di scegliere il proprio prezzo di vendita.
- L'importanza della regola del razioneamento efficiente è stata dimostrata da Davidson e Deneckere (1986), i quali hanno mostrato l'impossibilità di ottenere il risultato di K-S adottando una qualsiasi altra regola diversa dal razioneamento efficiente.
- La possibilità delle imprese di conoscere il livello di capacità adottato dall'impresa rivale, prima di scegliere il proprio prezzo di vendita, è essenziale per ottenere il risultato di K-S: non conoscendo la capacità adottata dall'impresa rivale, ogni impresa dovrebbe infatti scegliere i propri prezzi di vendita, senza conoscere la struttura dei costi dell'impresa rivale, e, quindi, senza conoscere le condizioni della concorrenza sui prezzi. In tal caso il gioco di K-S si trasformerebbe in un gioco ad un solo stadio, nel quale ogni impresa sceglie simultaneamente sia la capacità produttiva che il proprio prezzo di vendita, ciò determina, di conseguenza, risultati diversi dai risultati ottenibili con il modello di K-S (cfr. Gertner, 1985).

**Riferimenti bibliografici:**

- Beckmann M. J. (1965), "Bertrand-Edgeworth duopoly revisited", in Rudolf Henn ed., *Operations Research-Verfahren*, vol. ???, pp. 55-68, Hain, Meisenheim.
- Bertrand J. (1883), "Théorie mathématique de la richesse sociale", *Journal des Savants*, **48**: 499-508.
- Bertrand J. (1981), "Teoria matematica della ricchezza sociale", traduzione italiana (a cura di Elena Franco Nani) di: Bertrand (1883), "Théorie mathématique de la richesse sociale", *Journal des Savants*, **48**: 499-508; in Franco Nani (1981: pp. 277-86).
- Bertrand J. (1988), "Review of Walras's Théorie mathématique de la richesse sociale and Cournot's Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses", traduzione inglese (a cura di James W. Friedman) di: Bertrand (1883), "Théorie mathématique de la richesse sociale", *Journal des Savants*, **48**: 499-508; in Daughety (1988: pp. 73-81).
- Carraro C., Graziano C. (1993), *Mercati oligopolistici e strategie dell'impresa*, Bologna, il Mulino.
- Chowdhury P. R. (2004), "Bertrand-Edgeworth duopoly with linear cost: A tale of two paradoxes", *Discussion Paper 04-13*, Delhi, Indian Statistical Institute.
- Cournot Augustin A. (1838), *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses*, ristampa anastatica della prima edizione del 1838, a cura di Oscar Nuccio, Roma, Edizioni Bizzarri.
- Cournot Augustin A. (1897), "On the competition of producers", Chapter 7 in *Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth*, traduzione inglese (a cura di Nathaniel T. Bacon) di: Cournot A. A. (1838), *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses*, Paris, L. Hachette; in Daughety (1988: pp. 63-72).
- Cournot Augustin A. (1981), *Ricerche sui principi matematici della teoria della ricchezza*, traduzione italiana (a cura di Elena Franco Nani) di: Cournot A. A. (1838), *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses*, Paris, L. Hachette; in Franco Nani (1981: pp. 125-258).
- Daughety A. F. (1988), *Cournot oligopoly: Characterization and applications*, Cambridge, Cambridge University Press.
- Davidson C., Deneckere R. (1986), "Long-run competition in capacity, short-run competition in price, and the Cournot model", *Rand Journal of Economics*, Autumn, **17**(3): 404-15.

- de Bornier J. M. (1992), "The "Cournot-Bertrand Debate": A Historical Perspective", *History of Political Economy*, June, **24**(3): 623-56.
- Dimand Mary A., Dimand Robert W. (1996), *The History of Game Theory, Volume I: From the beginnings to 1945*, London and New York, Routledge.
- Dimand Robert W., Dore Mohammed H. I. (1999), "Cournot, Bertrand, and Game Theory: A Further Note", *Atlantic Economic Journal*, Settembre, **27**(3): 325-33.
- Edgeworth F. Y. (1881), *Mathematical Psychics: An Essay on The Application of Mathematics to The Moral Sciences*, London, C. Kegan Paul & Co., 1 Paternoster Square.
- Edgeworth F. Y. (1897), "La Teoria pura del Monopolio", *Giornale degli Economisti*, **15**: 13-31, 307-20, 405-14.
- Edgeworth F. Y. (1922), "The Mathematical Economics of Professor Amoroso", *Economic Journal*, **32**: 400-7.
- Edgeworth F. Y. (1925), "The pure theory of monopoly", (in) *Papers Relating to Political Economy*, **1**: 111-42.
- Fisher I. (1898), "Cournot and Mathematical Economics", *Quarterly Journal of Economics*, January, pp. 119-38.
- Fisher I. (1925), "Edgeworth's Papers Relating to Political Economy", *Quarterly Journal of Economics*, **40**: 167-71.
- Franco Nani E. (1981), *Opere di A. A. Cournot*, Torino, classici U.T.E.T.
- Friedman J. W. (1977), *Oligopoly and the theory of games*, Amsterdam, North-Holland.
- Friedman J. W. (1983), *Oligopoly theory*, Cambridge, Cambridge University Press.
- Fudenberg D., Tirole J. (1991), *Game theory*, Cambridge, Massachusetts, The MIT Press.
- Kreps D. M., Scheinkman J. (1983), "Quantity Precommitment and Bertrand Competition Yield Cournot Outcomes.", *Bell Journal of Economics*, **14**: 326-37.
- Gertner R. (1985), "Simultaneous Move Price-Quantity Games and Non-Market Clearing Equilibrium", *Mimeo*, MIT.
- Kreps D.M. (1987), "Nash equilibrium", in Eatwell J., M. Milgate e P. Newman (a cura di), *The New Palgrave: A Dictionary of Economics*, London, Macmillan.
- Kreps D.M. (1990), *A course in microeconomic theory*, Harvester, Wheatsheaf.
- Levitan R., Shubik M. (1972), "Price Duopoly and Capacity Constraints", *International Economic Review*, Febbraio, **13**: 111-22.
- Li Calzi M. (2002), "Un eponimo ricorrente: Nash e la teoria dei giochi", preparato in occasione dell' Assemblée UMI, <http://www.dm.unibo.it/socrates/cinema/NashEponimo.pdf>.

- Morrison Clarence C. (1998), "Cournot, Bertrand, and Modern Game Theory", *Atlantic Economic Journal*, 2 Giugno, **26**: 172-4.
- Nash J. F. (1951), "Non-Cooperative Games", *Annals of Mathematics*, **54**(2): 286-95.
- Nichol A. J. (1935), "Edgeworth's Theory of Duopoly Price", *Economic Journal*, Marzo, pp. 51-61.
- Osborne Martin J., Rubinstein A. (1994), *A Course in Game Theory*, Cambridge, Massachusetts, London, England, The MIT Press.
- Polo M. (1993), *Teoria dell'oligopolio*, Bologna, il Mulino.
- Salvadori N. (2002), "Diapositive utilizzate durante le lezioni", *Corso di Economia Industriale*, [http://www-dse.ec.unipi.it/salvadori/pdf/DiapositiveEI\\_Anno02-03.pdf](http://www-dse.ec.unipi.it/salvadori/pdf/DiapositiveEI_Anno02-03.pdf).
- Shapley L. S., "A Duopoly Model with Price Competition" (abstract), *Econometrica*, **XXV**: 354-5.
- Shubik M. (1955), "A Comparison of Treatments of a Duopoly Situation, Part II", *Econometrica*, **XXIII**: 417-31, 424.
- Shubik M. (1959), *Strategy and Market Structure: Competition, Oligopoly, and the Theory of Games*, New York, John Wiley & Sons.
- Shubik M. (1980), *Market Structure and Behavior*, Cambridge, Massachusetts and London, England, Harvard University Press.
- Shubik M. (1984), *A game-theoretic approach to political economy: volume 2 of Game Theory in the social sciences*, Cambridge, The MIT Press.
- Schumpeter J. A. (1954), *History of Economic Analysis*, New York, Oxford University Press.
- Sonnenschein H. (1987), "oligopoly and game theory", in Eatwell J., M. Milgate e P. Newman (a cura di), *The New Palgrave: A Dictionary of Economics*, London, Macmillan.
- Sylos Labini P. (1987), "oligopoly", in Eatwell J., M. Milgate e P. Newman (a cura di), *The New Palgrave: A Dictionary of Economics*, London, Macmillan.
- Tasnàdi A. (1999), "A two-stage Bertrand-Edgeworth game", *Economics Letters*, **65**: 353-58.
- Tirole J. (1995), *Teoria dell'organizzazione industriale*, Milano, HOEPLI.
- Vega-Redondo F. (2003), *Economics and the Theory of Games*, Cambridge University Press.
- Vives X. (1993), "Edgeworth and modern oligopoly theory", *European Economic Review*, **37**: 463-76.
- Vives X. (2001), *Oligopoly Pricing: Old Ideas and New Tools*, Cambridge, Massachusetts, London, England, The MIT Press.
- Wolfstetter E. (2002), *Topics in Microeconomics: Industrial Organization, Auctions and Incentives*, Cambridge University Press.