MATEMATICA - 2

Pat-Z

Argomenti del corso

I	II
Funzioni di due e più variabili	**Sistemi di equazioni lineari** **Matrici e vettori**
circa 6 lezioni	*circa 9 lezioni*

Materiale

Programma del corso di Matematica,
scaricabile dalla piattaforma online:

http://sunshine.dma.unive.it/elearning

Materiale

•**Sydsaeter, Hammond (S.H.):** *Manuale di matematica per l'analisi economica, Vita e Pensiero, 2004*

I parte:

• S.H., cap. 11, 12, 13

• Bassetto, Corazza, Gusso Nardon, *Esercizi sulle funzioni di più variabili con applicazioni all'economia* (quaderno di didattica 30/2008)

II parte:

• S.H., cap. 15, 16

• Cardin, Ferretti, Funari: *Introduzione soft alla matematica per l'economia e la finanza: I SISTEMI LINEARI* (quad. di didattica 25/2008)

• Ciurlia, Gusso, Nardon, *Esercizi di algebra lineare e sistemi di equazioni lineari* (quaderno di didattica 22/2006)

Recapiti

Docente: Stefania Funari

Dipartimento di Management
San Giobbe, Cannaregio 873

tel. +39 041-2346956
fax +39 041-2347444

E-mail: funari@unive.it
http://venus.unive.it/funari

Orario ricevimento: mercoledì ore 14.30
Studio numero 222 (secondo piano ala C2, ex dip. matematica statistica)

Orario lezioni

🕘 ORARIO DELLE LEZIONI
Lunedì 10.30-12.00 S.Giobbe 4A
Martedì 10.30-12.00 S.Giobbe 4A
Mercoledì 10.30-12.00 S.Giobbe 4A

Non c'è lezione i giorni:
Lunedì 21 Novembre
Mercoledì 30 Novembre
Mercoledì 7 dicembre

Il giorno Giovedì 24/11 ci sarà lezione al posto dell'esercitazione.
Il giorno Martedì 6 dicembre ci sarà esercitazione al posto della lezione.

Recuperi: lunedì 12/12; martedì 13/12; mercoledì 14/12

Orario esercitazioni

🕗 **ORARIO DELLE ESERCITAZIONI**
Giovedì 14.00-15.30 S.Giobbe 4A
Dott. Adila Magris (amagris@unive.it) – ricevimento giovedì 15.30 (studio15)

Non c'è esercitazione:
Giovedì 8 dicembre

Il giorno Giovedì 24/11 ci sarà lezione al posto dell'esercitazione.
Il giorno Martedì 6 dicembre ci sarà esercitazione al posto della lezione.

Recupero: giovedì 15 dicembre (ultima esercitazione)

Prima lezione

Funzioni di due variabili

Dominio

Grafico

Curve di livello

Alcune situazioni

- *La* ***temperatura in una stanza*** *(può dipendere dal punto in cui la misuriamo, dal momento in cui effettuiamo la misurazione, …)*

- *Il* ***volume di un cilindro*** *(dipende dal raggio r e dall'altezza h)*

- *La* ***domanda di un bene*** *da parte di un consumatore (può dipendere dal prezzo del bene che si vuole acquistare, ma anche dal prezzo degli altri beni (complementari, sostituti), dalla ricchezza, dal reddito,…)*

- *La* ***quantità di bene prodotta*** *da una certa impresa (può dipendere dalla quantità di risorsa lavoro impiegata, dalla quantità di capitale utilizzato, …)*

FUNZIONE DI DUE VARIABILI

Definizione (da SH, pag. 404)

Una funzione di due variabili *x* ed *y*, con dominio *D* è una regola che assegna ad ogni coppia $(x, y) \in D$ **uno ed un solo numero reale** $z = f(x, y)$

x,y variabili ***indipendenti*** *(variabili esogene)*

z variabile ***dipendente*** *(variabile endogena)*

z è ***immagine*** *di (x,y)*

D ***dominio*** *della funzione*

Esempio 1

$$z = f(x, y) = \frac{x + y}{2}$$

Determinare f(4,2) e f(3,11)

$$f(4,2) = \frac{4+2}{2} = 3$$

$$f(3{,}11) = \frac{3+11}{2} = 7$$

Esempio 2

$$z = f(x, y) = \sqrt{xy}$$

Determinare f(1,2) e f(-3,-2)

$$f(1,2) = \sqrt{1 \cdot 2} = \sqrt{2} \qquad f(-3,-2) = \sqrt{(-3)(-2)} = \sqrt{6}$$

Attenzione al dominio di f!

Esempio 3

funzione di produzione Cobb-Douglas

$$P(L, K) = AL^{a}K^{b}$$

A,a,b costanti

P produzione totale

L fattore produttivo: LAVORO

K fattore produttivo : CAPITALE

$$L \geq 0; K \geq 0$$

$$P(L,K) = 1.01\,L^{0.75}K^{0.25}$$

$$P(200{,}350) = 1.01\,(200)^{0.75}(350)^{0.25} \approx 232.33$$

Domanda: di quanto aumenta la produzione se aumentiamo il primo input di una unità?

$$P(201{,}350) = 1.01\,(201)^{0.75}(350)^{0.25} \approx 233.2$$

$$P(201{,}350) - P(200{,}350) \approx 0.87$$

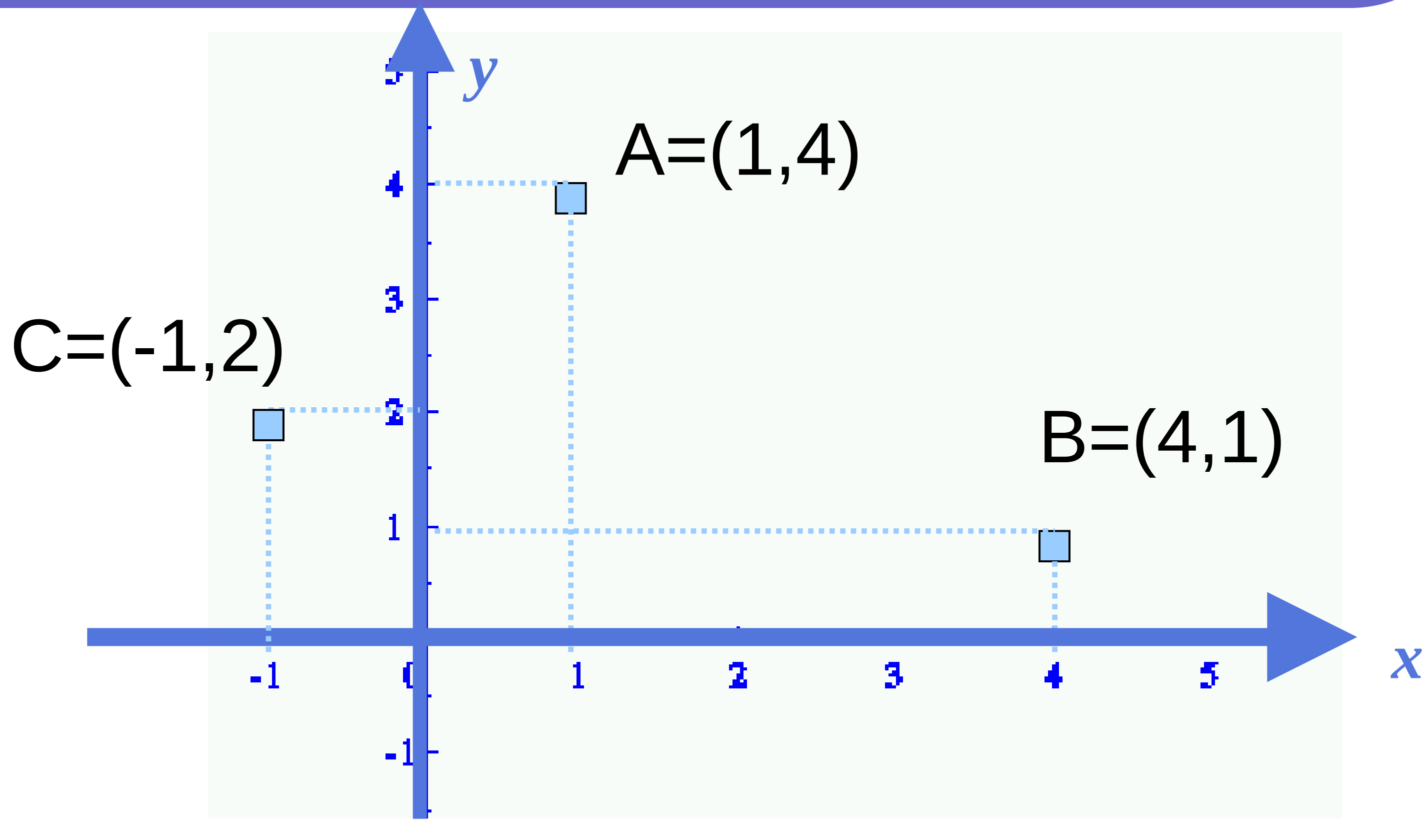
DOMINIO

- *L'insieme D è indicato nella definizione della funzione e rappresenta..*

- *Spesso si assegna una funzione mediante una espressione; in questo caso il dominio (insieme naturale di definizione) rappresenta…*

- *Qualora una funzione rappresenti un modello economico …..*

$$D \subseteq R^2$$



$$\mathbf{R}^2 = \{(x, y) \text{ tali che } x \in R,\ y \in R\}$$

Piano cartesiano o spazio euclideo a due dimensioni

Troviamo il dominio

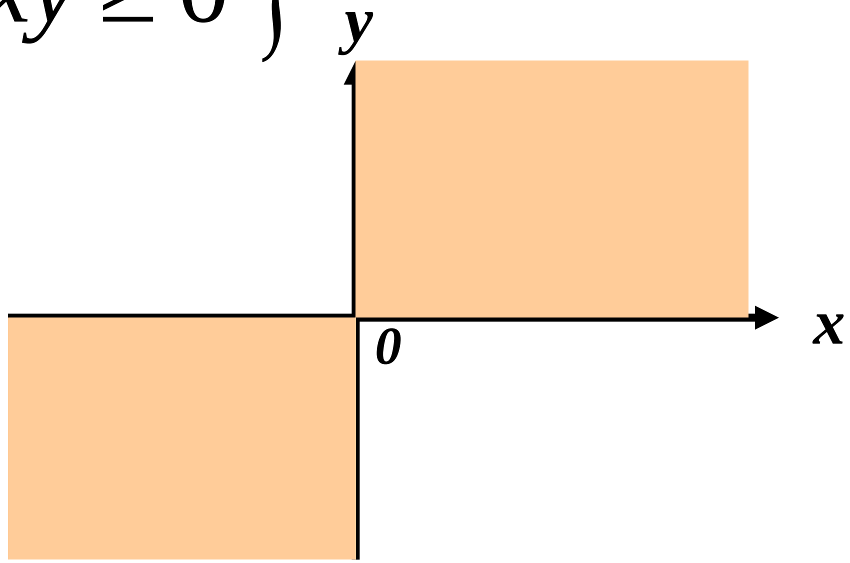
1. $$f(x,y) = 6x^2 - 10y^2$$

$$D = R^2$$

Troviamo il dominio

2. $$f(x,y)=\sqrt{xy}$$

$$D=\left\{(x,y)\in R^2 \;\middle|\; xy\geq 0\right\}$$



Troviamo il dominio

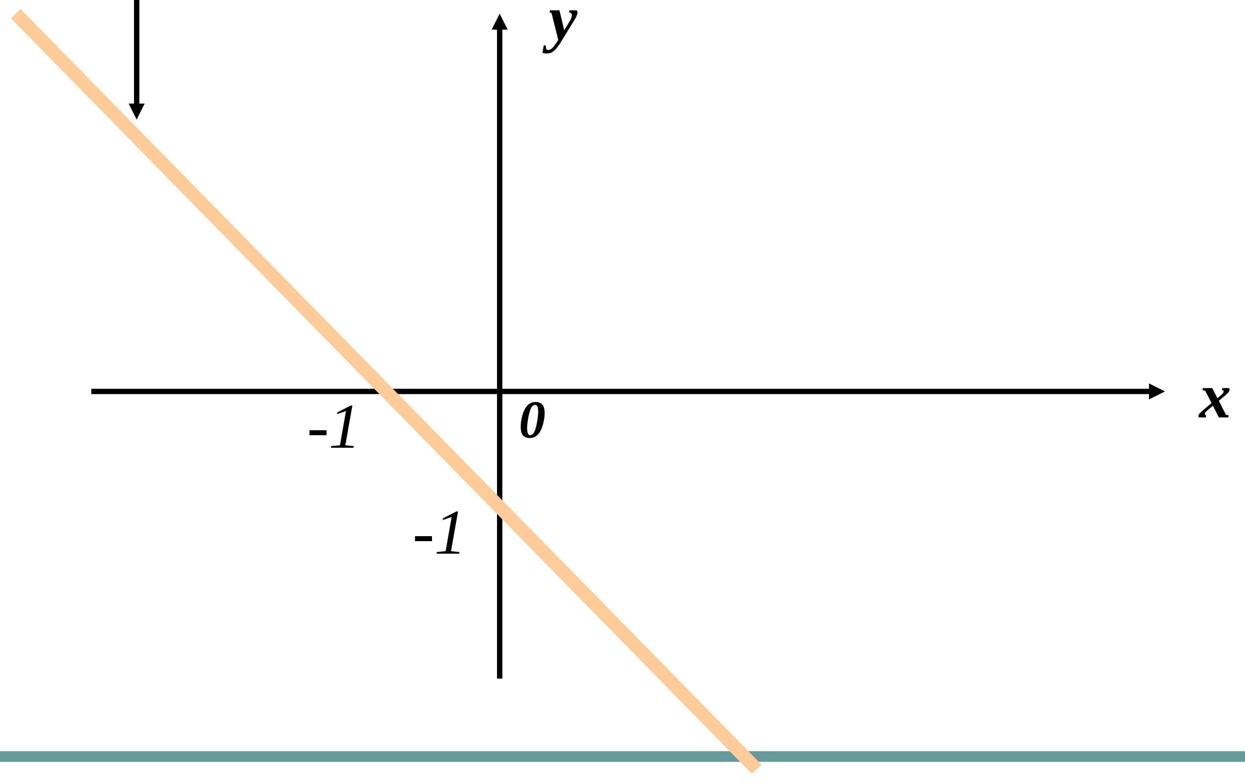
3. $$f(x,y)=\frac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}$$

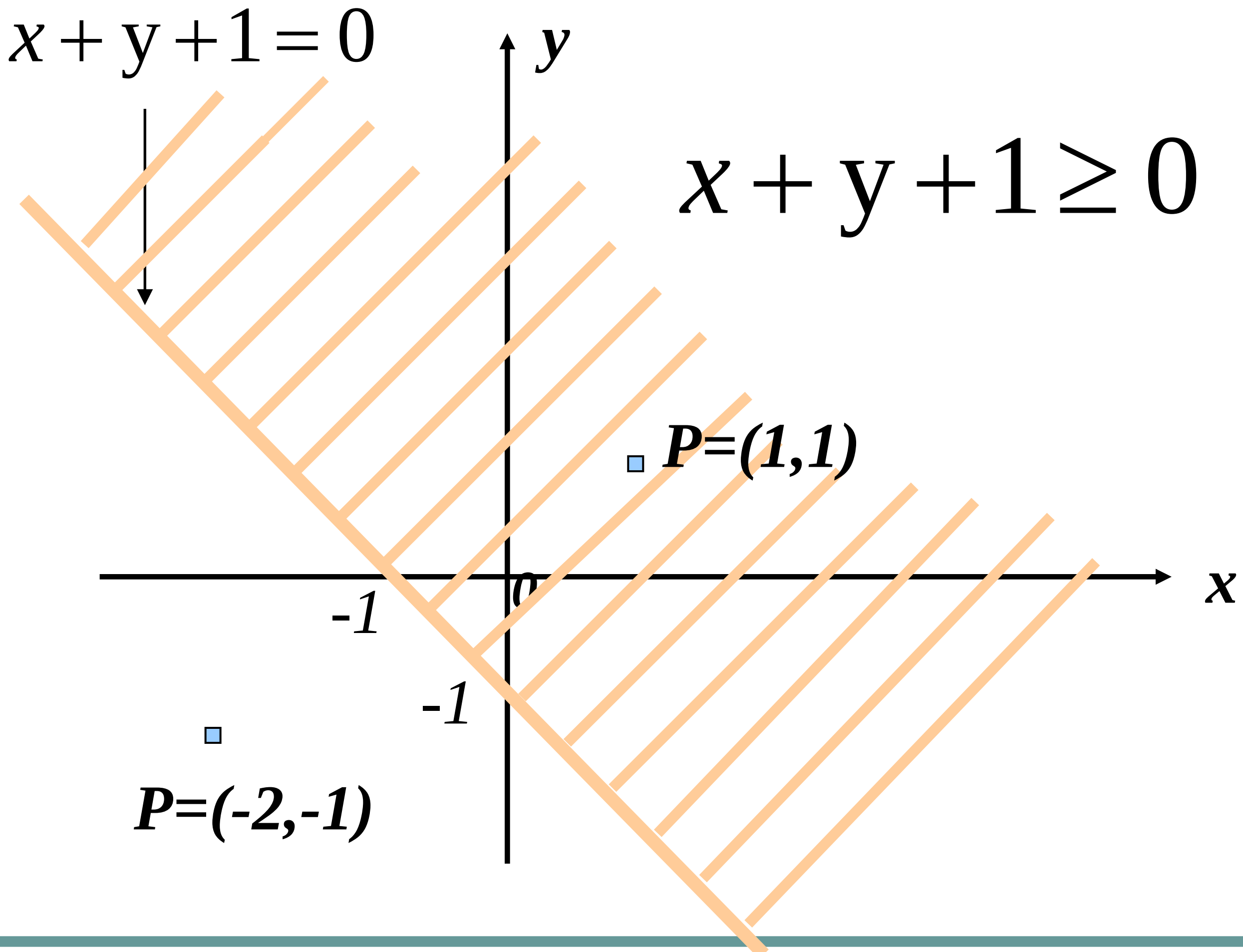
$$D=\left\{(x,y)\in R^2\ \middle|\ x+\mathrm{y}+1\geq 0,\ x\neq 1\right\}$$

Per determinare e disegnare il dominio di funzioni di due variabili occorre saper trattare disequazioni e sistemi di disequazioni in due variabili

Nell’esempio $$x + y + 1 \geq 0$$

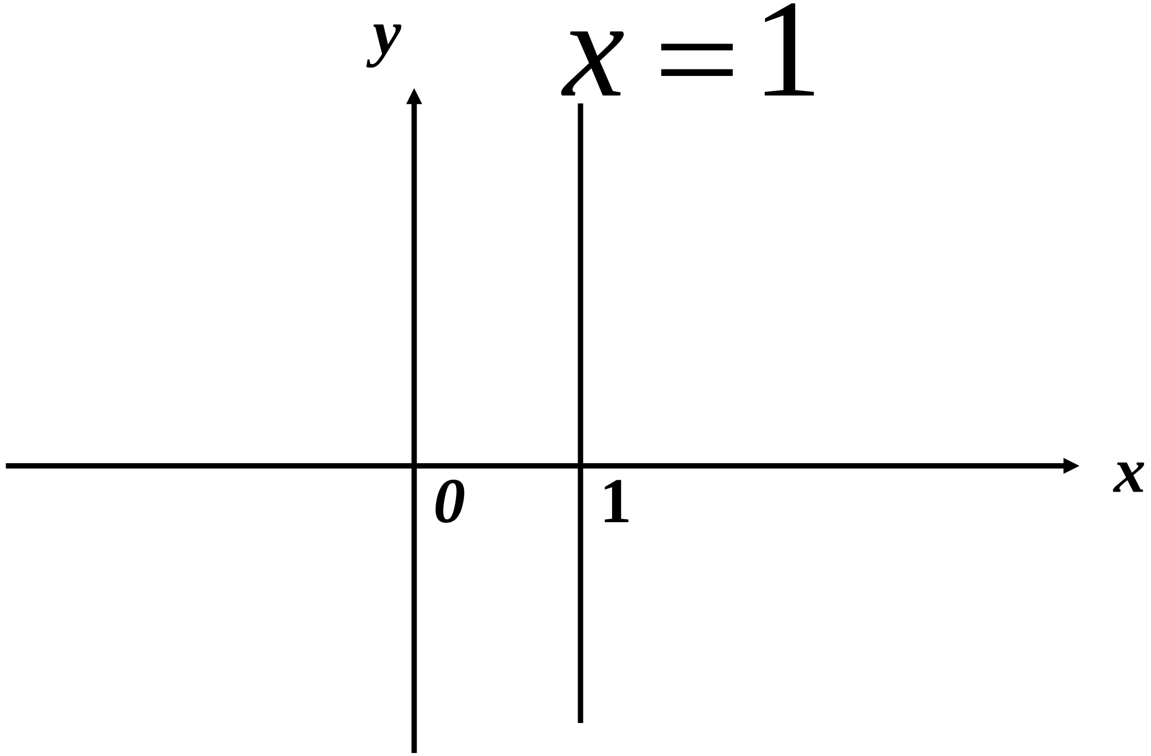
$$x + y + 1 = 0$$



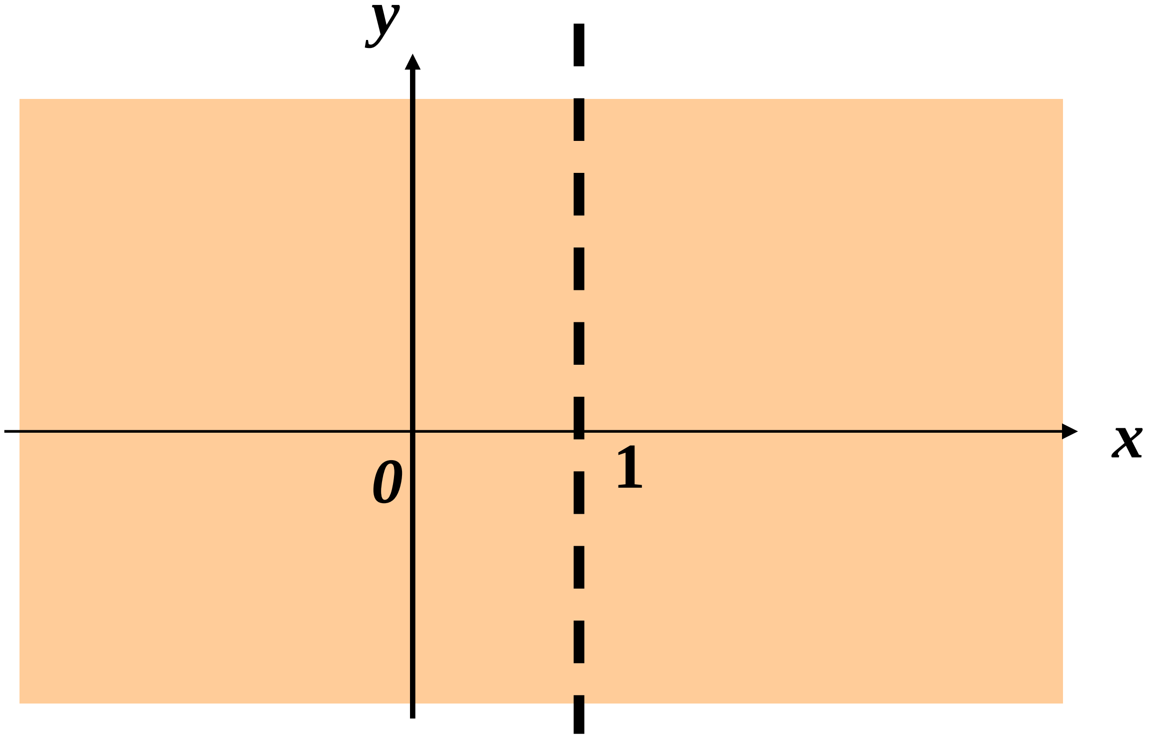


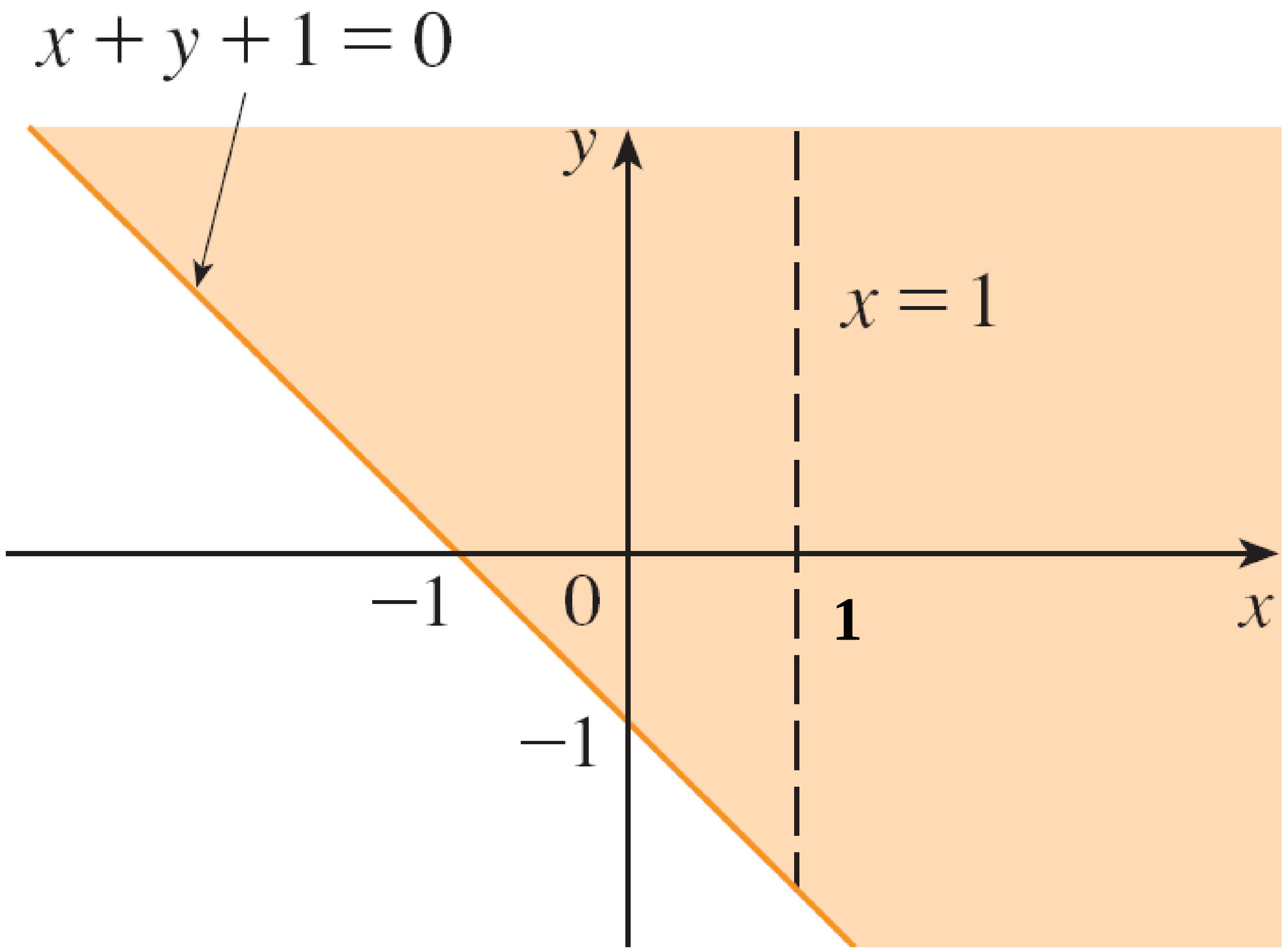
$x + y + 1 = 0$
y
$x + y + 1 \geq 0$
P=(1,1)
0
x
-1
-1
P=(-2,-1)

$$x = 1$$



$$x \neq 1$$





x + y + 1 = 0
y
x = 1
−1
0
1
x
−1

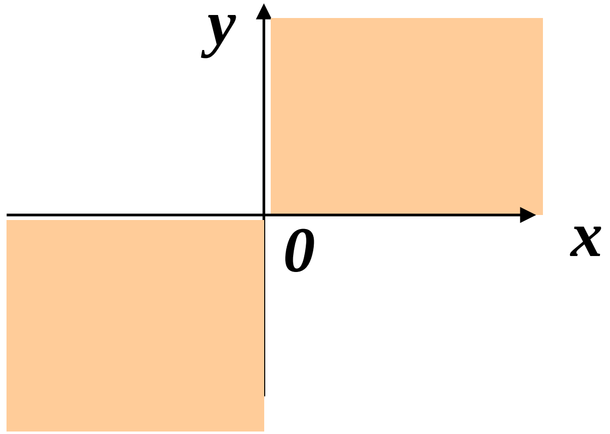
Troviamo il dominio

4. $$f(x,y)=\sqrt{xy}\,\ln(4-x^2-y^2)$$

Condizioni:

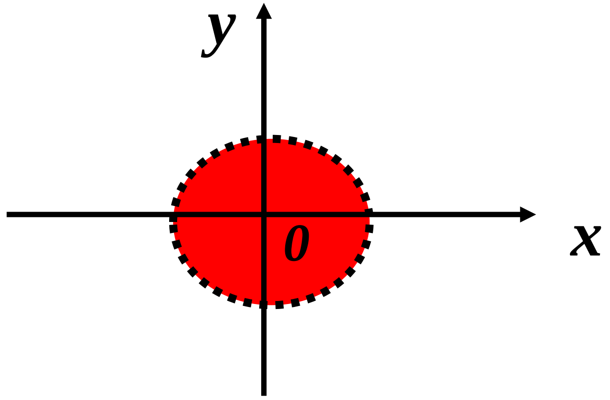
$$\begin{cases} xy \geq 0 \\ 4-x^2-y^2>0 \end{cases}$$

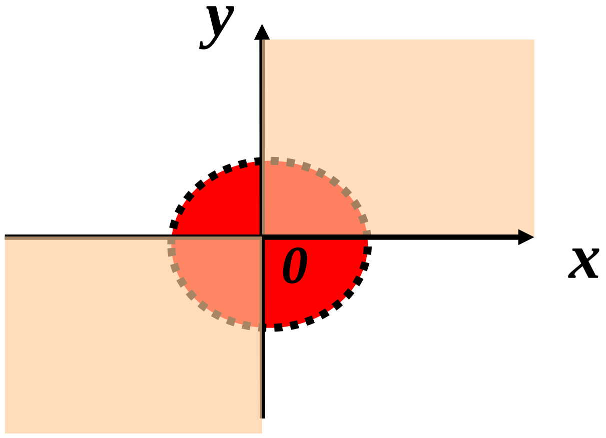
$$xy \geq 0$$

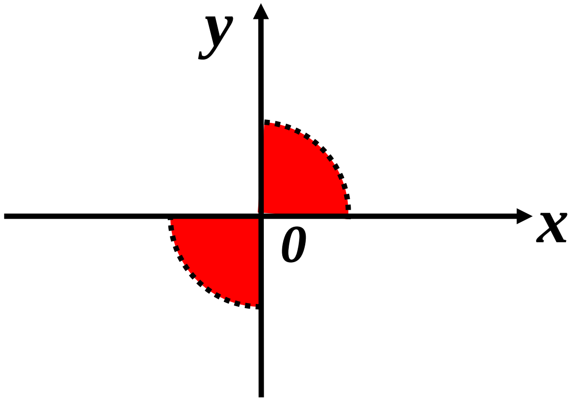


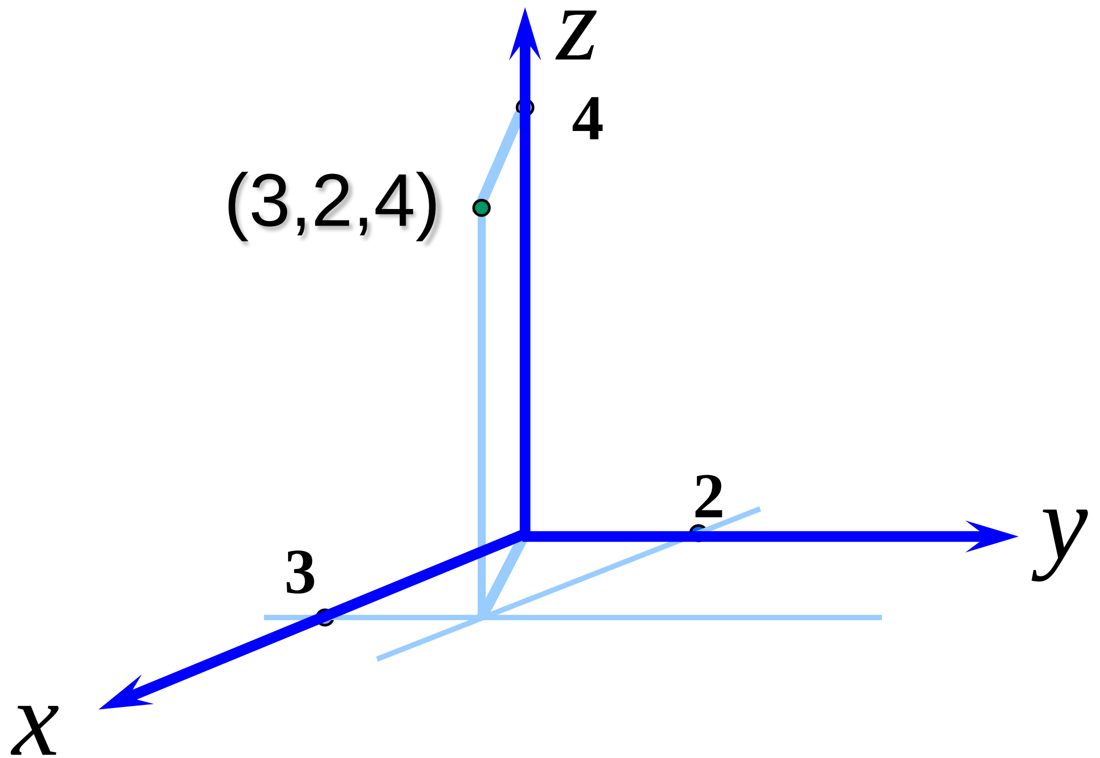
$$4 - x^2 - y^2 > 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 < 4$$



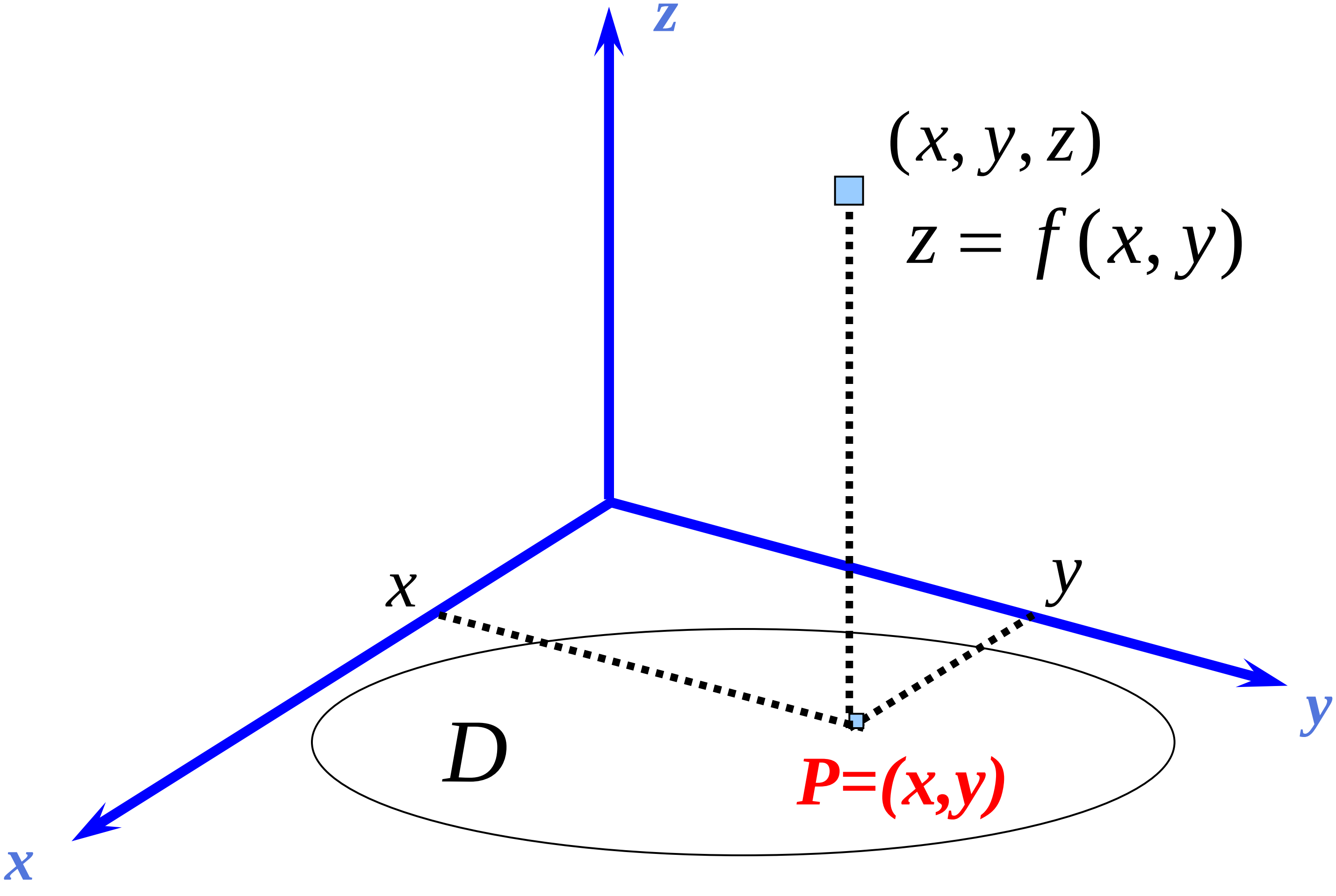

y
x
0

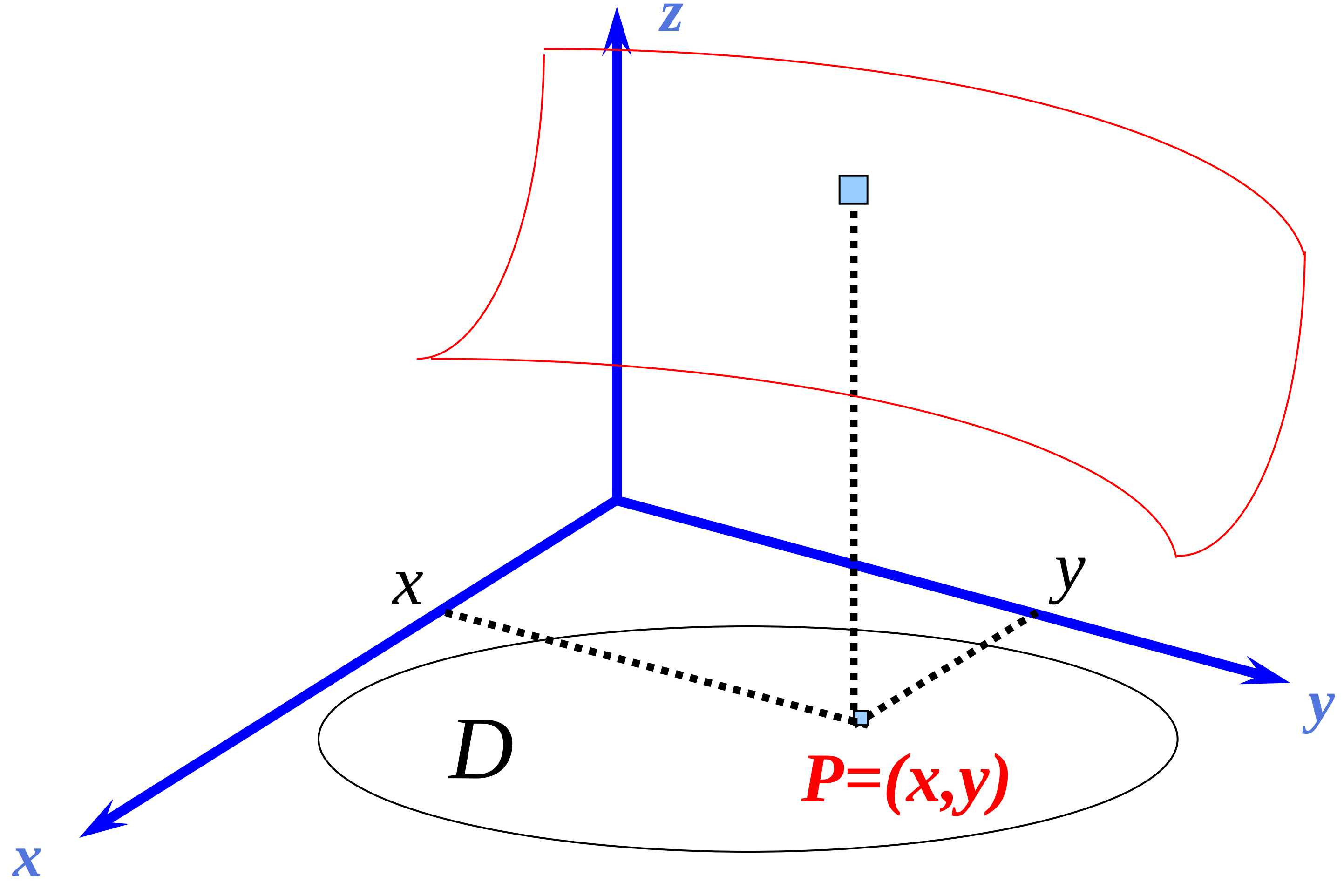

y
x
0



$$\mathbf{R}^3 = \{(x, y, z) \text{ tali che } x \in R,\ y \in R,\ z \in R\}$$

spazio euclideo a tre dimensioni


z
(x, y, z)
$z = f(x, y)$
x
y
y
D
P=(x,y)
x



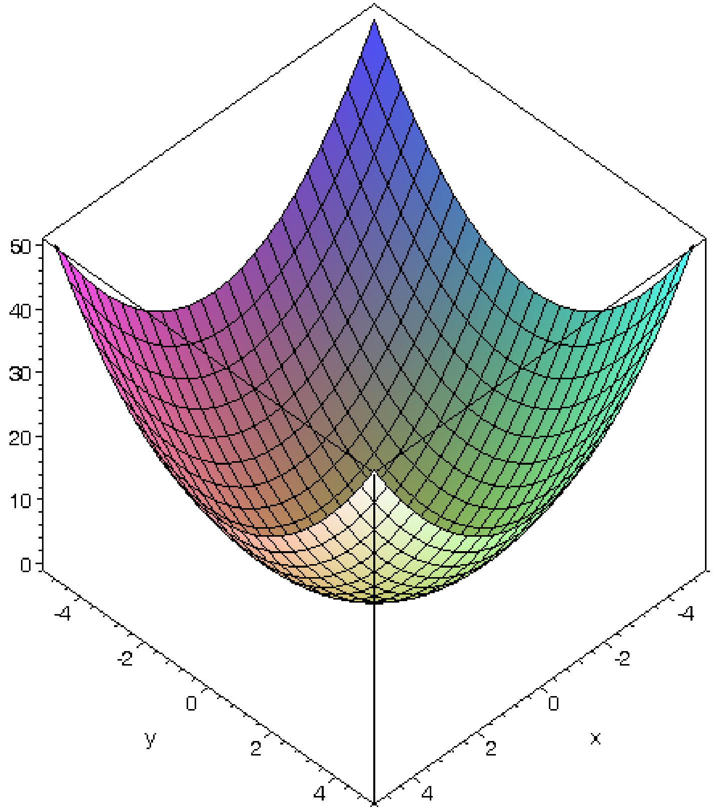
z
x
y
y
D
P=(x,y)
x

GRAFICO

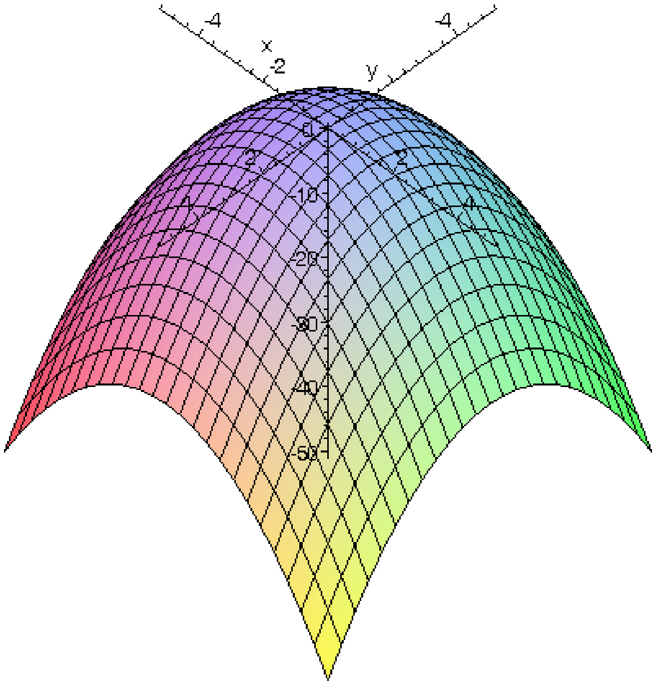
Il grafico di una funzione di due variabili z=f(x,y) è l'insieme dei punti di coordinate (x, y, f(x,y)) al variare di (x,y) nel dominio.

$$G = \left\{ (x, y, z) \in R^3 \middle| (x, y) \in D, z = f(x, y) \right\}$$

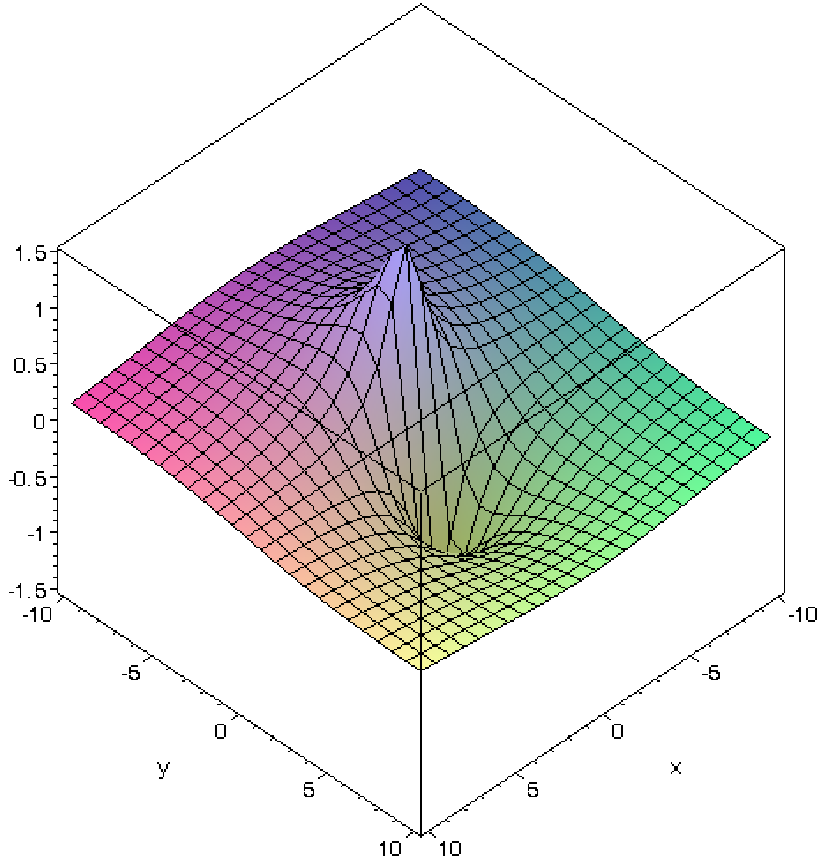
$$f(x,y)=x^2+y^2$$



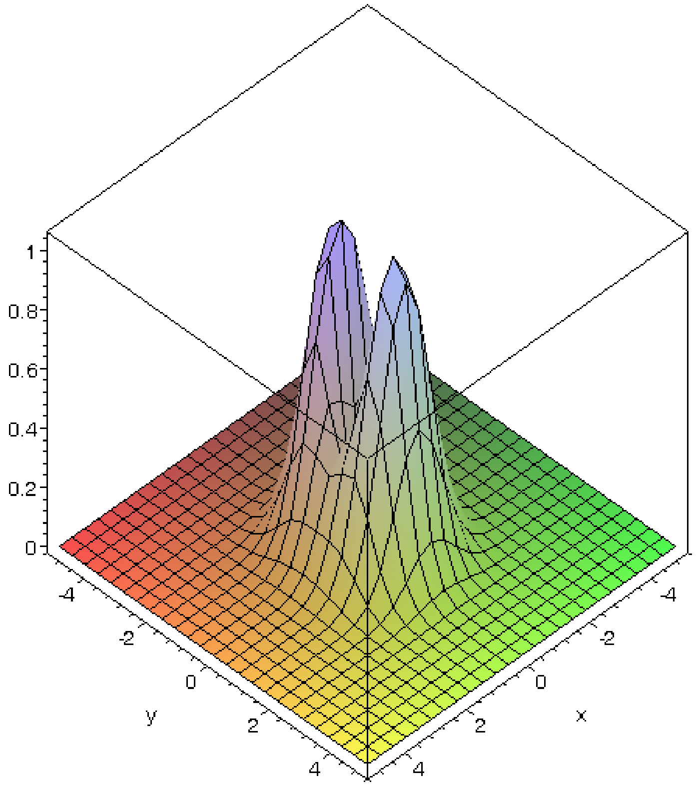
$$f(x,y) = -x^2 - y^2$$



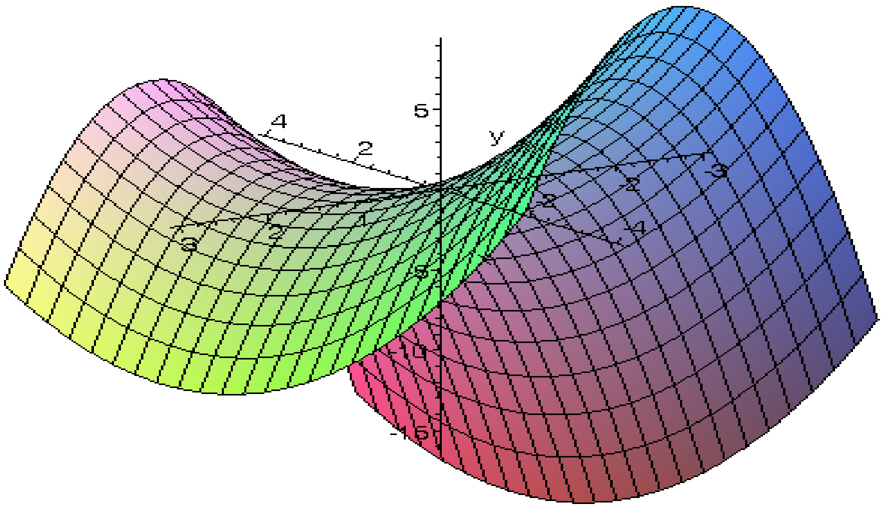
$$f(x,y) = \frac{-3y}{x^2 + y^2 + 1}$$



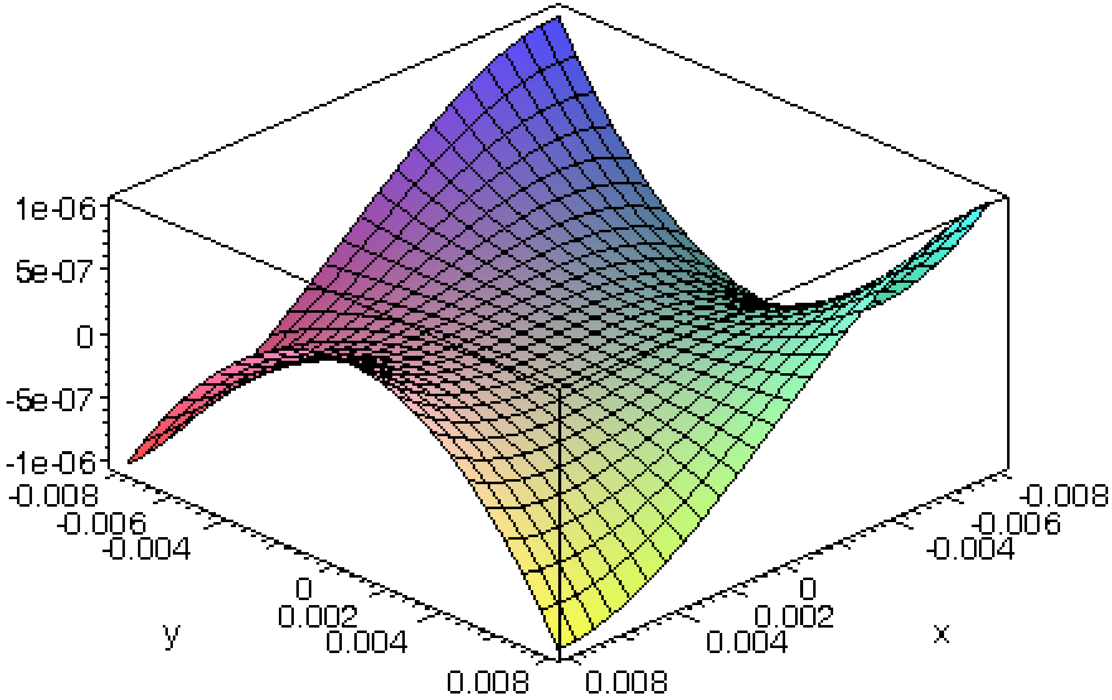
$$f(x,y) = (x^2 + 3y^2)e^{(-x^2 - y^2)}$$



$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

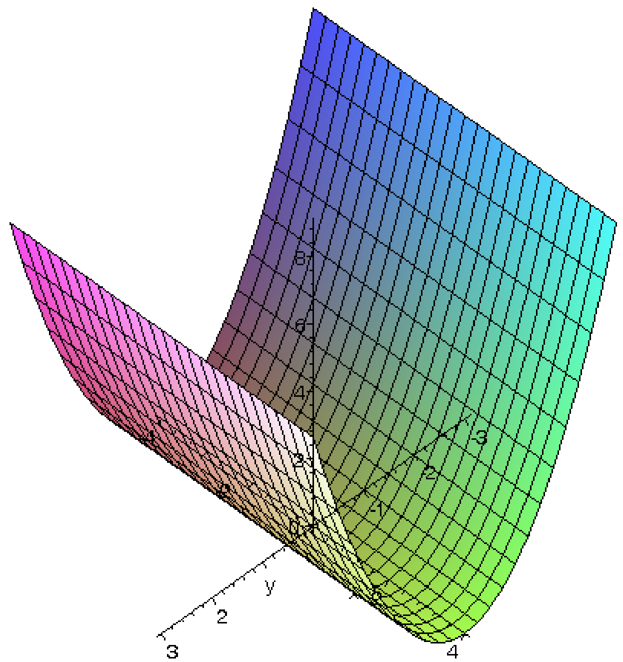


$$f(x,y)=x^3-3xy^2$$

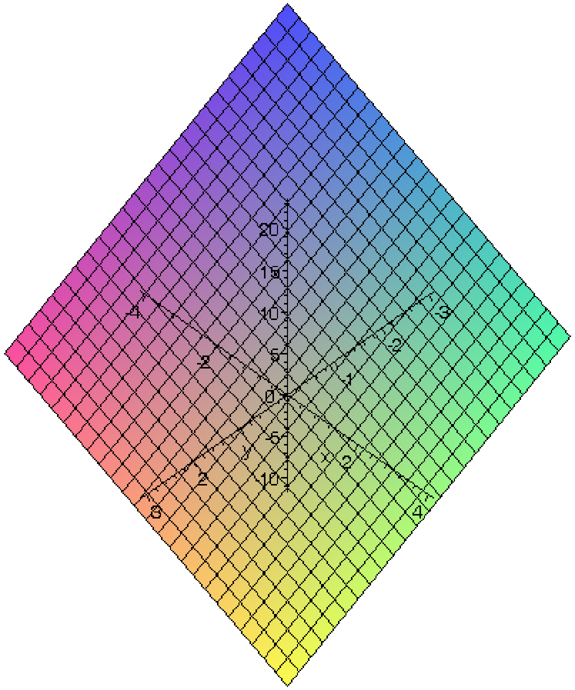


1e-06
5e-07
0
-5e-07
-1e-06
-0.008
-0.006
-0.004
0
0.002
0.004
0.008
y
-0.008
-0.006
-0.004
0
0.002
0.004
0.008
x

$$f(x, y) = x^2$$



$$f(x,y)=6-3x-2y$$



Equazioni e loro grafici in $\mathbb{R}^3$

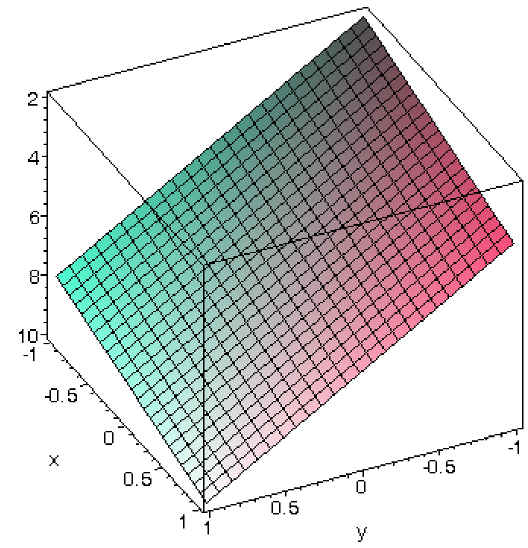
Il grafico di una equazione che lega tra loro le variabili x,y,z è l'insieme dei punti (x,y,z) dello spazio che soddisfano l'equazione.

Piani in $\mathbb{R}^3$

Un'equazione **lineare** in 3 variabili rappresenta un piano dello spazio cartesiano.

$$ax + by + cz + d = 0$$

in cui a, b e c non sono contemporaneamente nulli



$$x + 3y - z + 6 = 0$$

Esempi:

$$-x-y-z=0 \longrightarrow z=f(x,y)=-x-y$$

$$10-x-y-z=0 \longrightarrow z=f(x,y)=10-x-y$$

Se nell’equazione $ax + by + cz + d = 0$

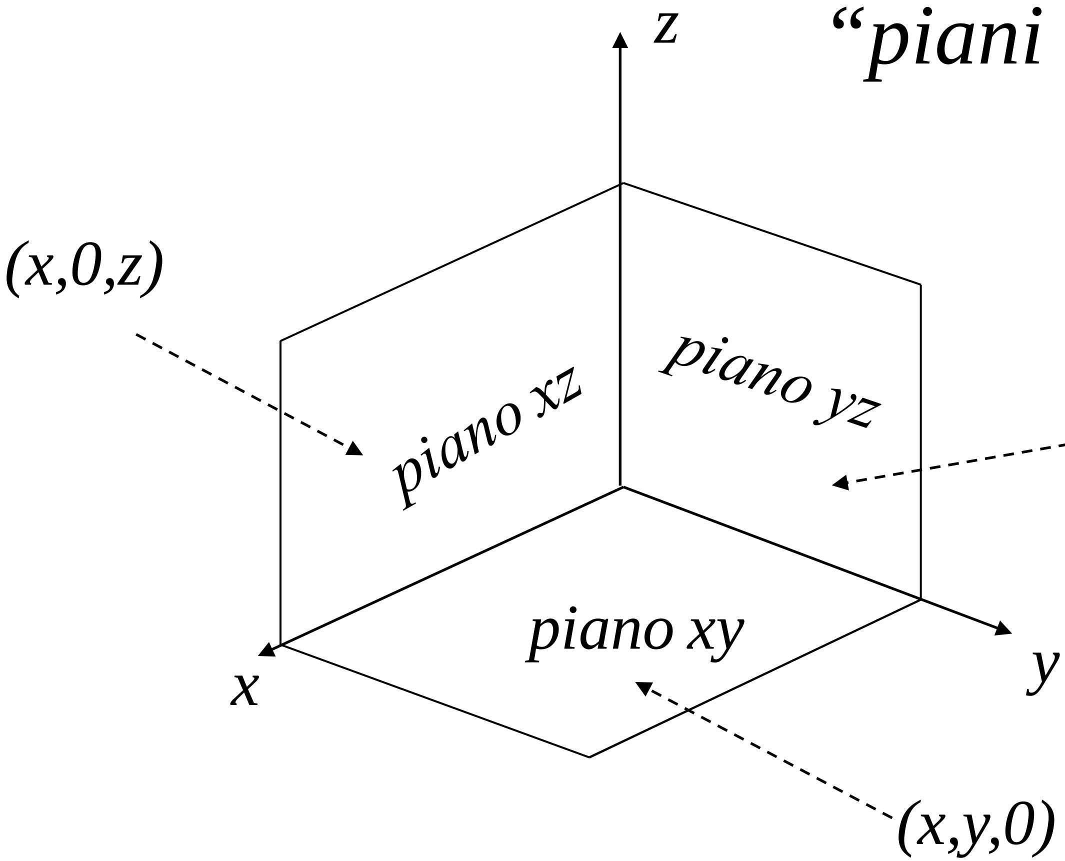
il coefficiente *c* è diverso da 0, allora si può ricavare la forma esplicita del piano

$$z = -\frac{a}{c}x - \frac{b}{c}y - \frac{d}{c}$$

che può essere riscritta come $z = mx + ny + p$

Alcuni piani particolari

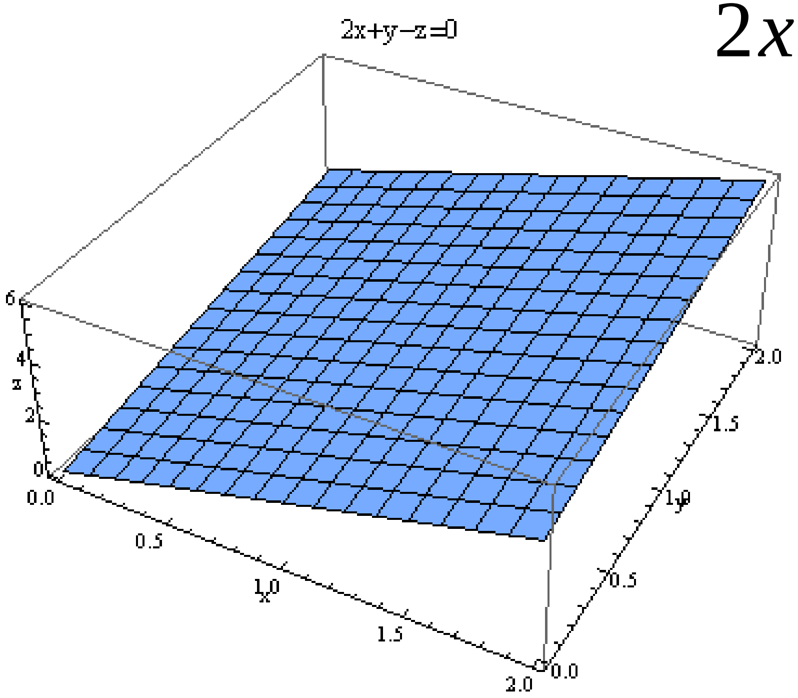
"piani coordinati"



Alcuni piani particolari

- Se l’equazione del piano manca del termine noto, il piano passa per l’origine degli assi

$$2x + y - z = 0$$

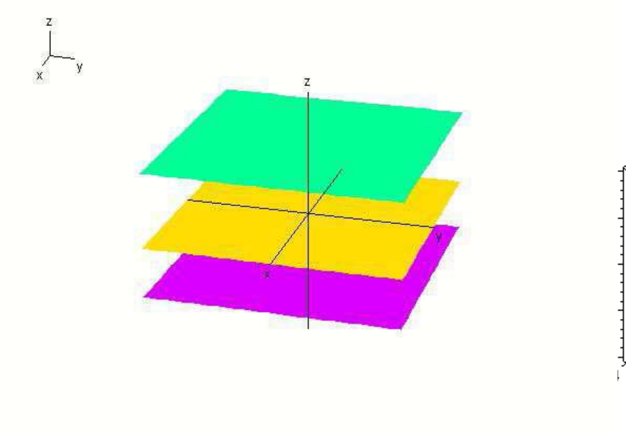


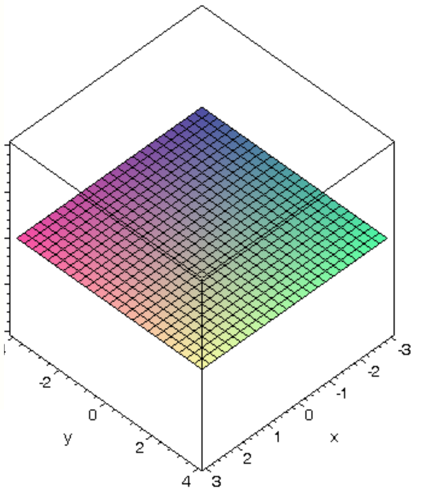
Alcuni piani particolari

- ***z = k***

piano parallelo al piano coordinato xy

z = 3
z = 0
z = – 2





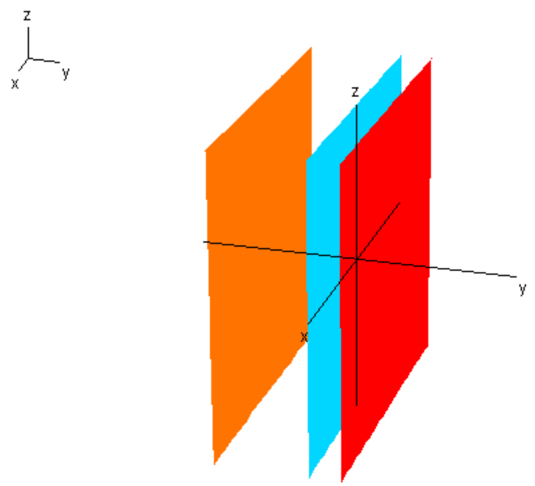
- In particolare *z = 0* è l'equazione del piano coordinato xy

Alcuni piani particolari

- ***y = k***

piano parallelo al piano coordinato xz

$y = -3$
$y = 0$
$y = 1$



- In particolare y=0 è l'equazione del piano coordinato xz

Alcuni piani particolari

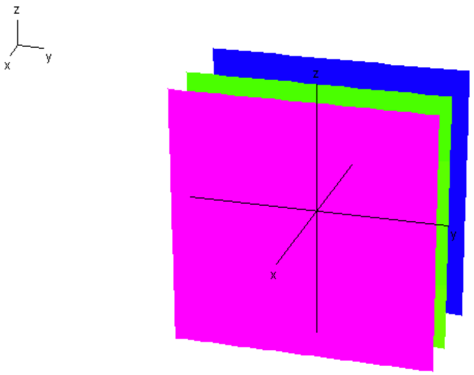
- **x = k**

piano parallelo al piano coordinato *yz*

x = – 3

x = 0

x = 2



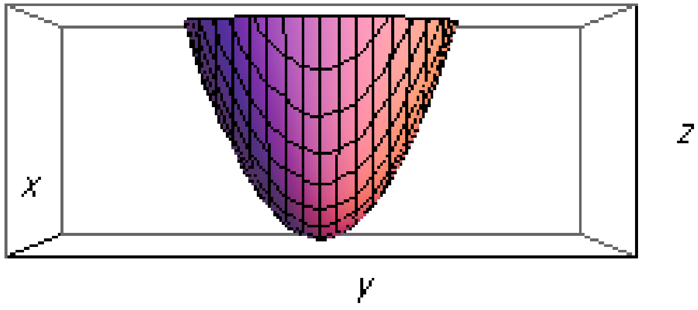
- In particolare x=0 è l’equazione del piano coordinato yz

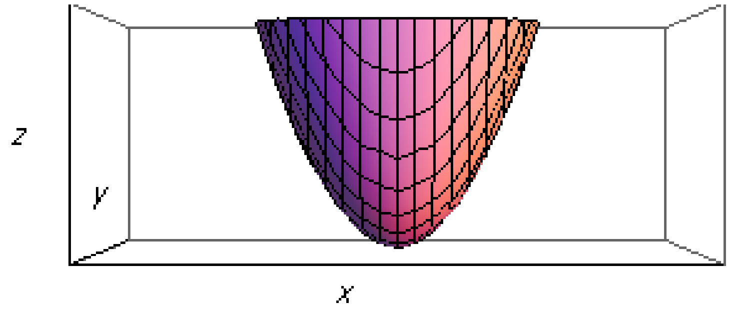
sezioni

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

$$x = k \qquad\qquad y = k$$

$$f(k,y) = k^2 + y^2 \qquad\qquad f(x,k) = x^2 + k^2$$

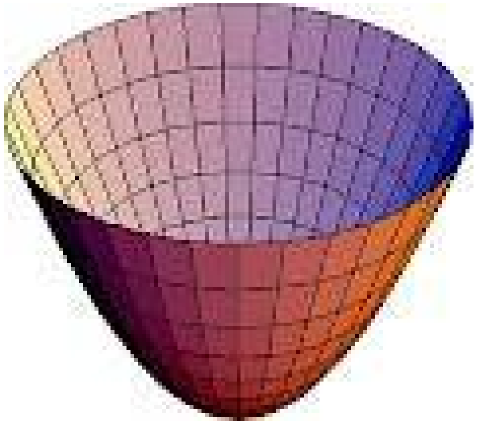




sezioni

Possiamo anche considerare sezioni orizzontali, cioè intersechiamo il grafico di f con piani paralleli al piano xy

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$



$$z = k$$

$$f(x,y) = x^2 + y^2 = k$$

Riprenderemo questo discorso con le curve di livello

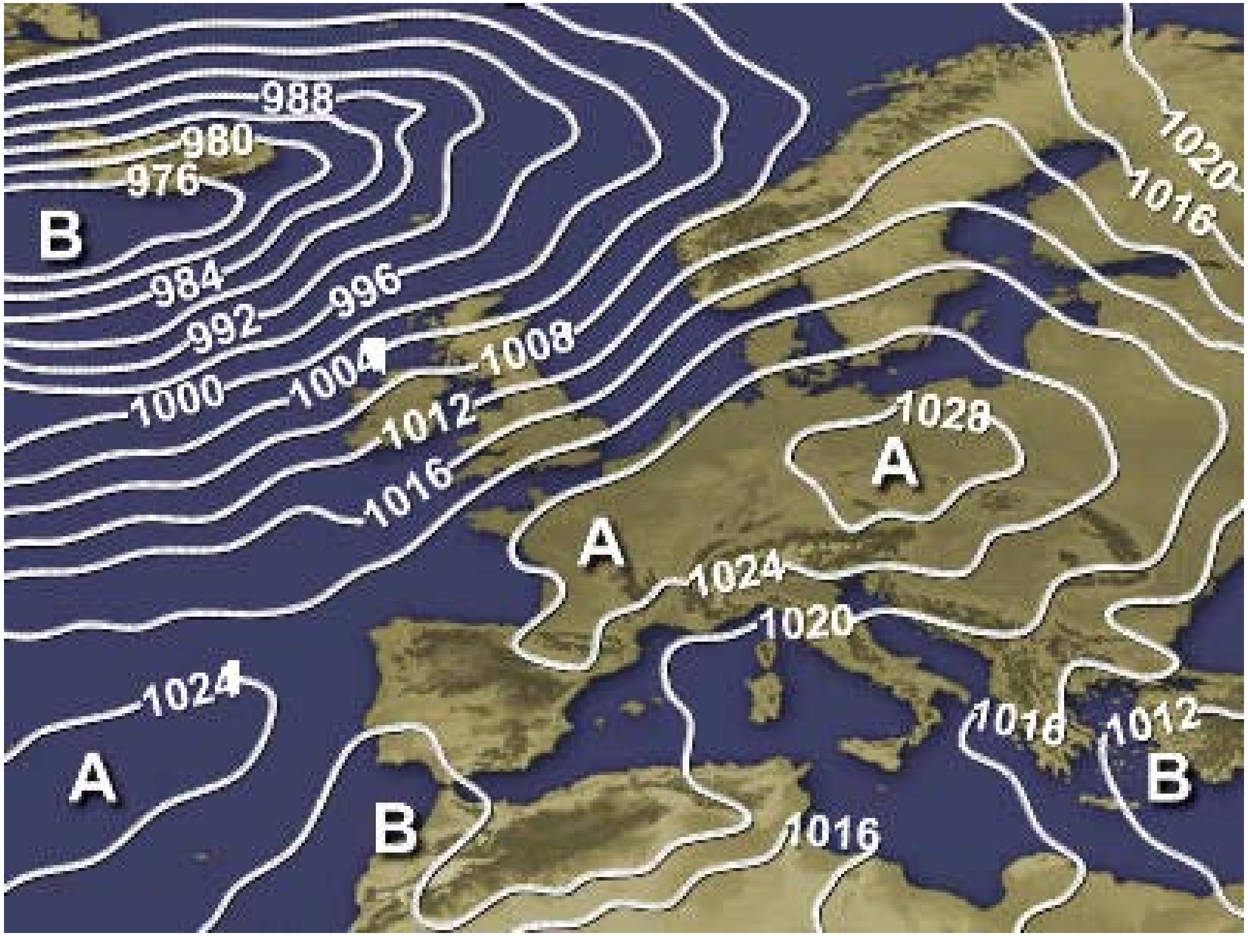
Curve di livello

Vediamo ora un altro modo di rappresentazione geometrica delle funzioni di due variabili.

Esso consiste nel considerare delle curve in un piano, ma che danno informazioni sul livello assunto dalla funzione in tali punti.

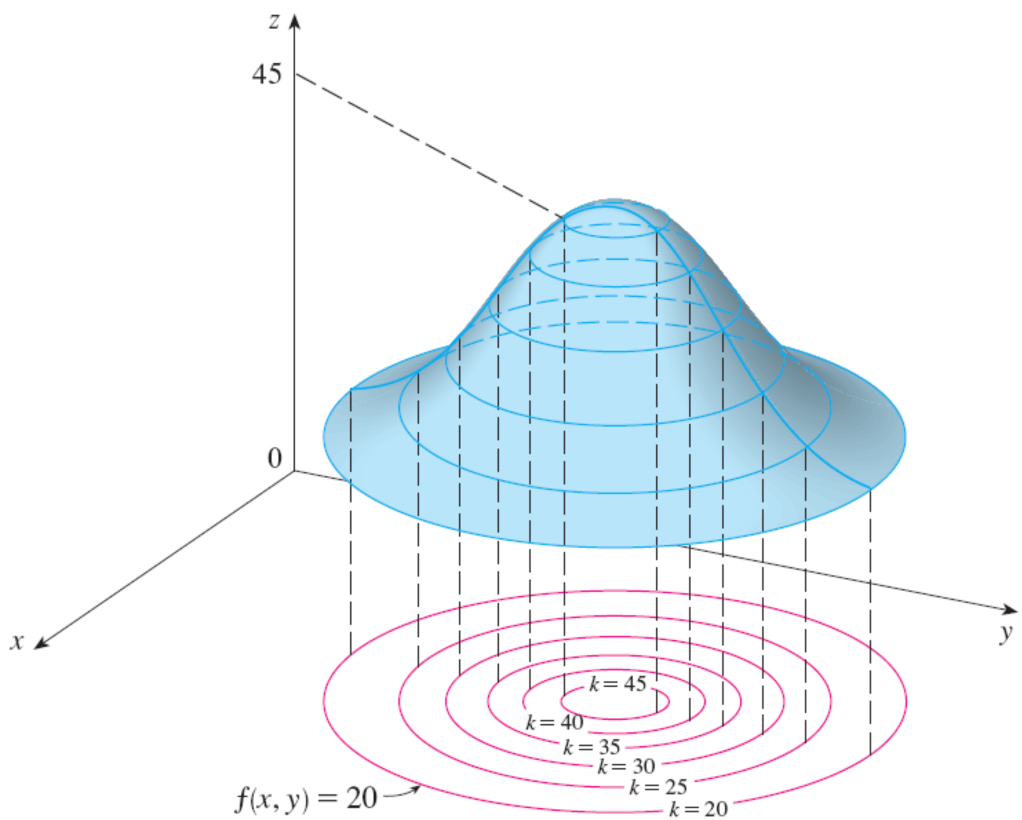
Esempi si trovano nelle carte geografiche (che fanno uso delle ***isoipse****), nelle carte metereologiche (che fanno uso delle* ***isobare****), ma anche nelle applicazioni* economiche (***isoquanti****,* ***curve di indifferenza****)*


Pelmo
Staulanza
Venezia - de luca
Dettaglio



988
980
976
B
984
992
996
1000
1004
1008
1012
1016
1020
1016
1028
A
A
1024
1020
1024
A
B
1016
1012
B
1016

Curve di livello



Curve di livello

Le curve di livello di una funzione f di due variabili sono le curve di equazione

$$f(x, y) = k$$

con k costante

Tracciamo alcune curve di livello

- Disegnare le curve di livello della funzione

$$f(x, y) = 6 - 3x - 2y$$

corrispondenti ai valori

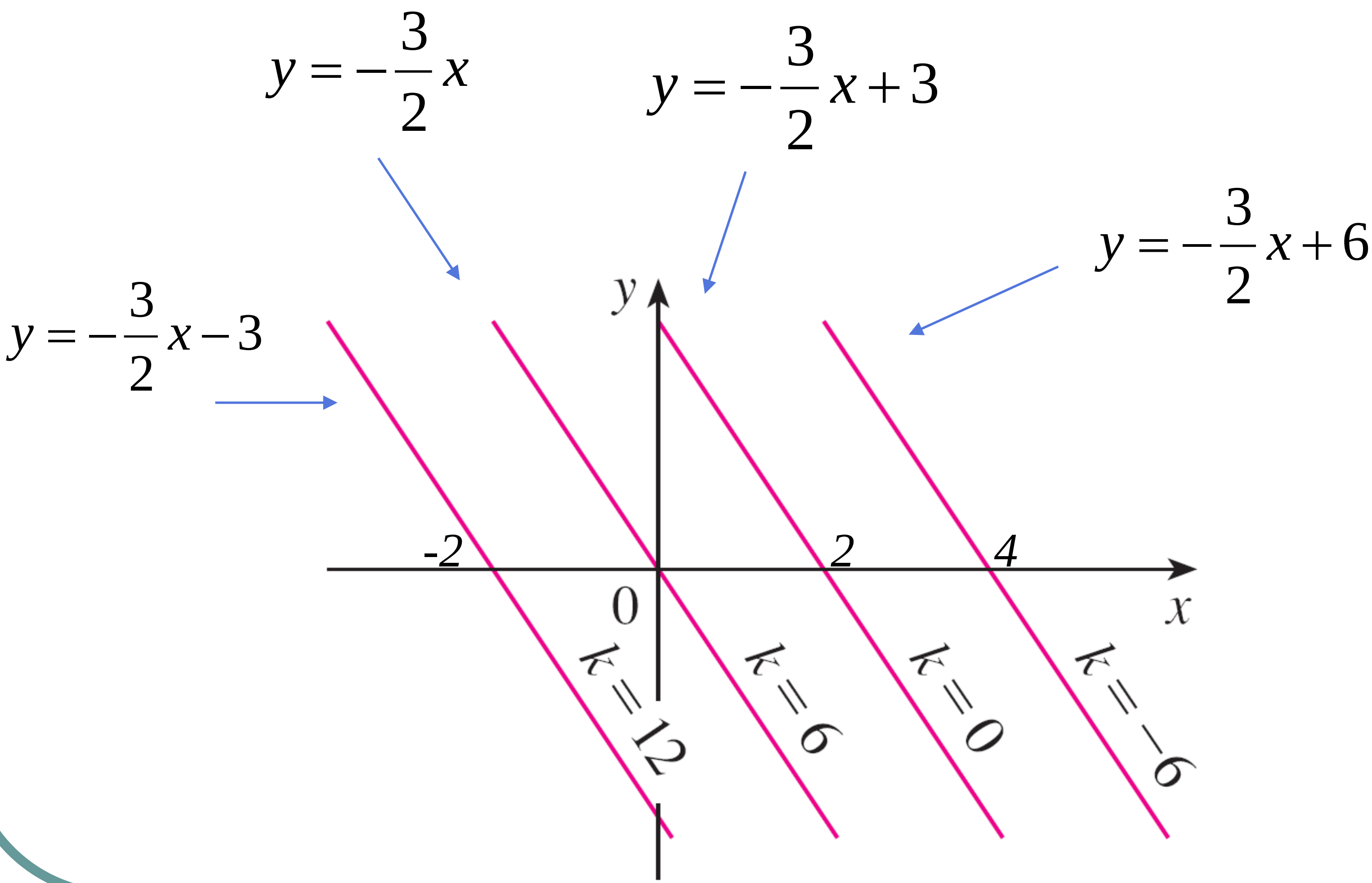
$$k = -6,\ 0,\ 6,\ 12$$

$$6-3x-2y=k$$

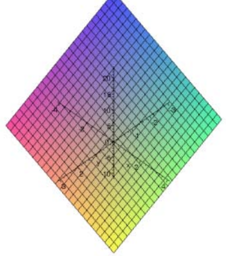
$$y=-\frac{3}{2}x+3-\frac{k}{2}$$

se $k = 0$ $\quad y=-\frac{3}{2}x+3$

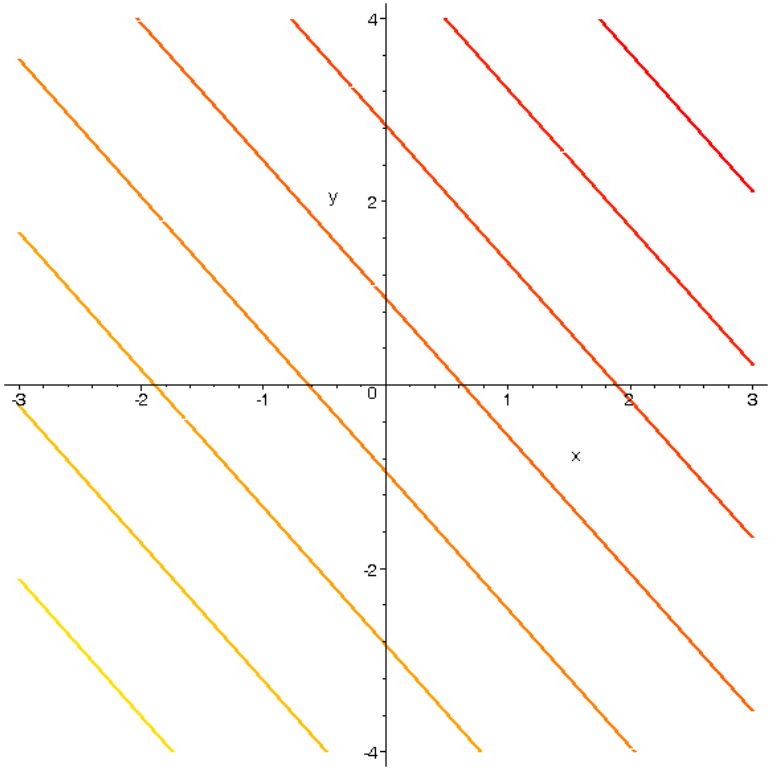
se $k = 6$ $\quad y=-\frac{3}{2}x$



$y=-\frac{3}{2}x$
$y=-\frac{3}{2}x+3$
$y=-\frac{3}{2}x+6$
$y=-\frac{3}{2}x-3$
y
-2
2
4
0
x
$k=12$
$k=6$
$k=0$
$k=-6$



$$f(x, y) = 6 - 3x - 2y$$



curve di livello

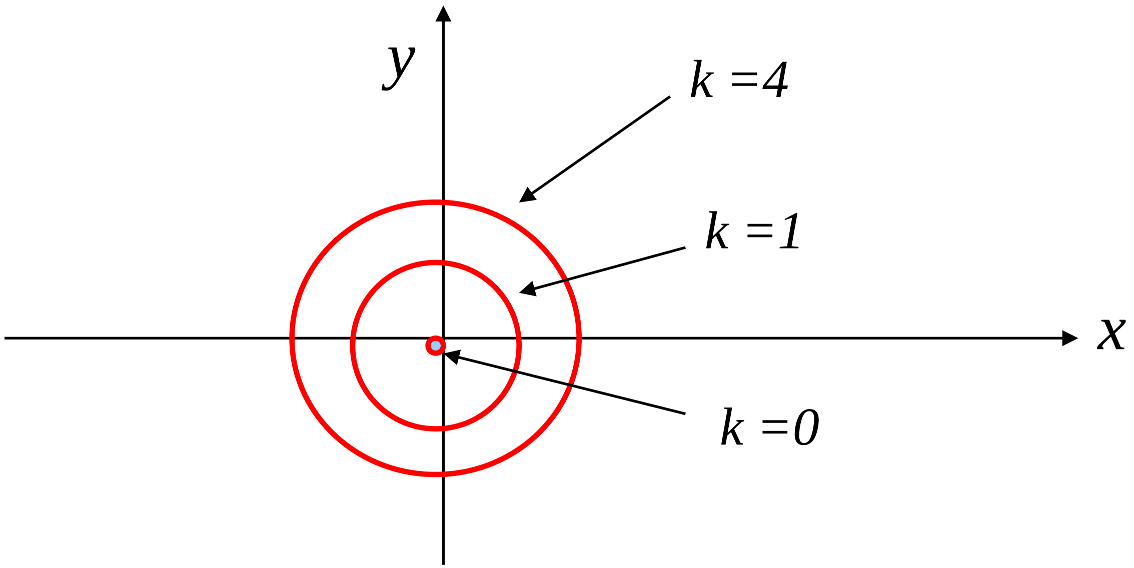
$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

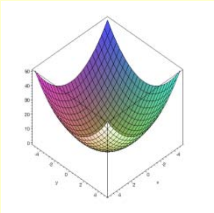
$$f(x, y) = x^2 + y^2 = k$$

se $k < 0$ *l'equazione non ha soluzioni reali*

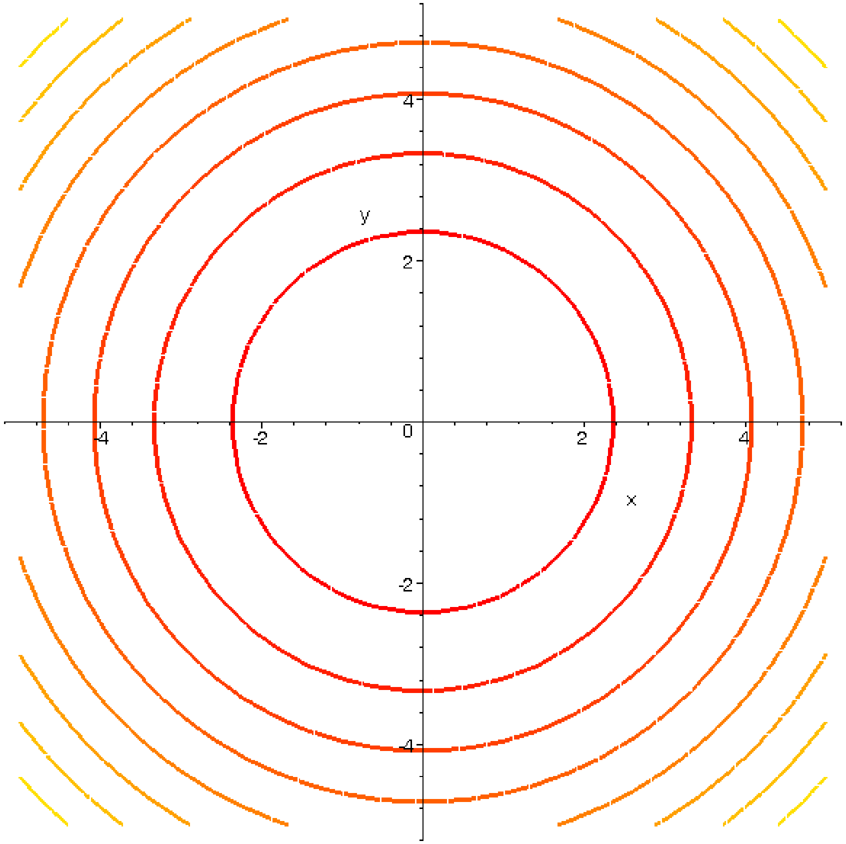
se $k = 0$ *unica soluzione (0,0)*

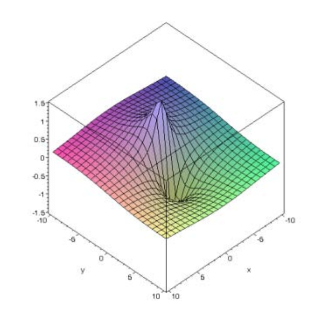
se $k > 0$ *le curve di livello sono circonferenze con centro l'origine e raggio* $\sqrt{k}$



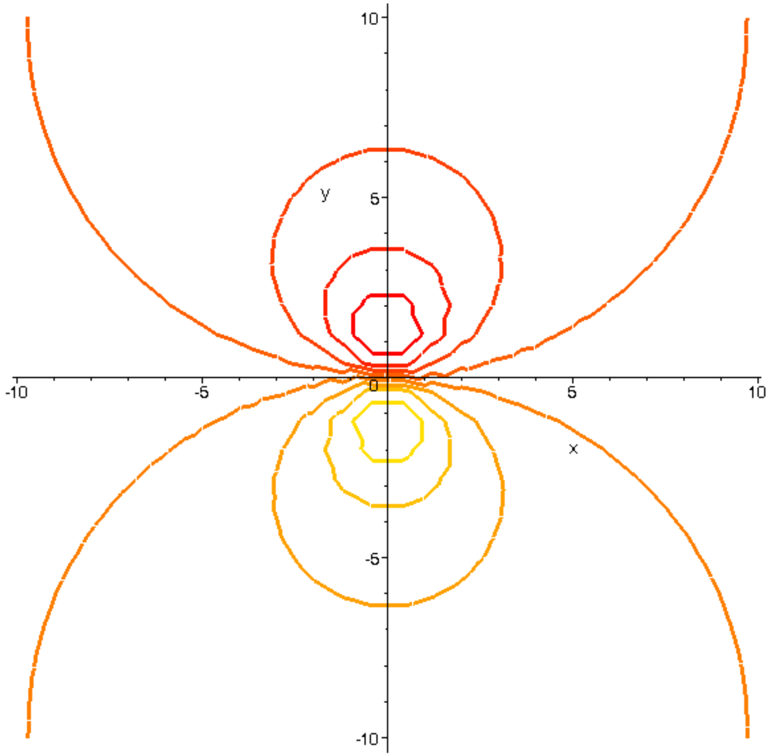


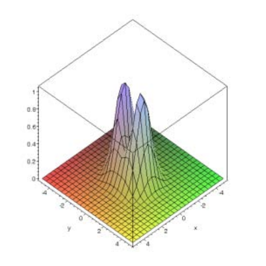
$$f(x,y) = x^2 + y^2$$



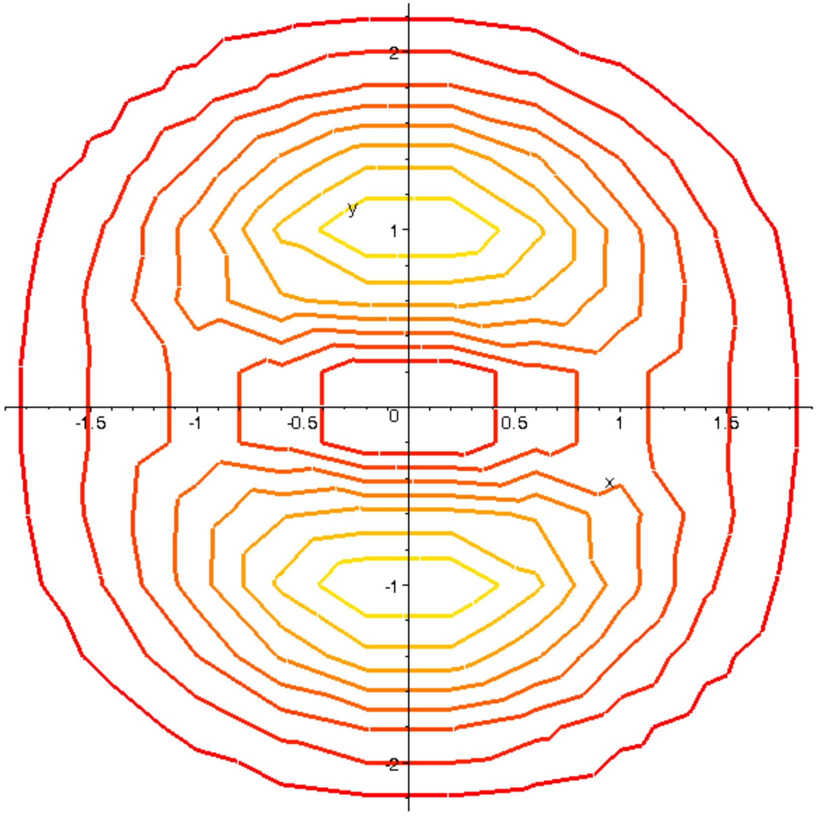


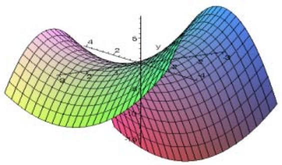
$$f(x,y)=\frac{-3y}{x^2+y^2+1}$$



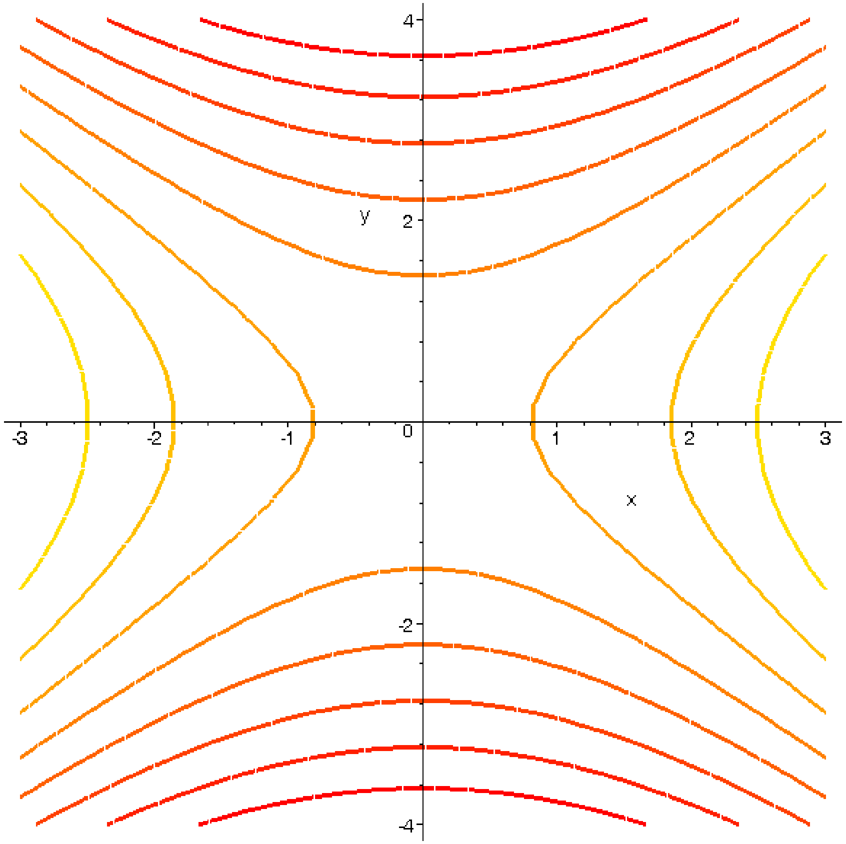


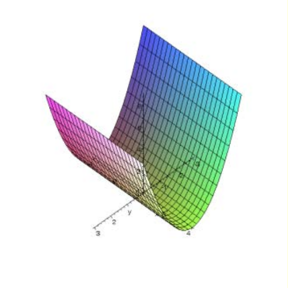
$$f(x,y)=(x^2+3y^2)e^{(-x^2-y^2)}$$



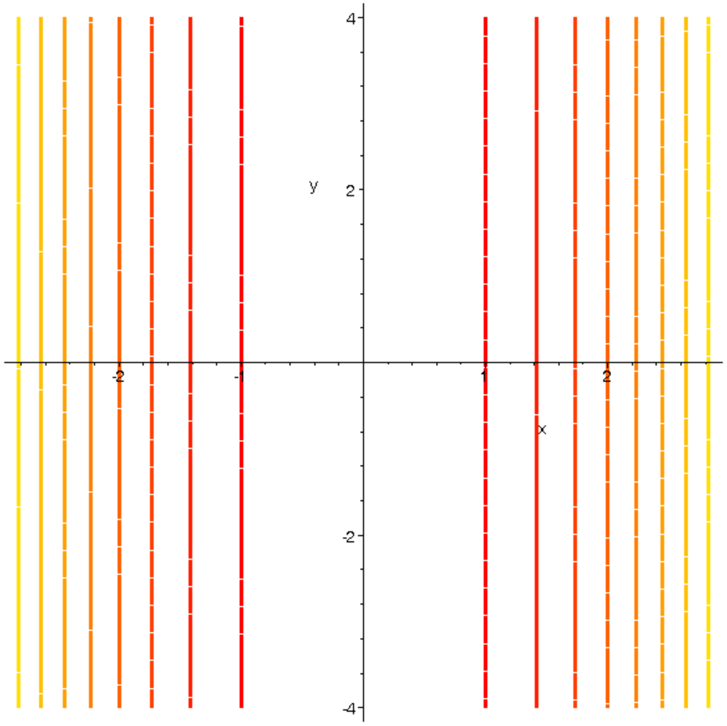


$$f(x,y) = x^2 - y^2$$

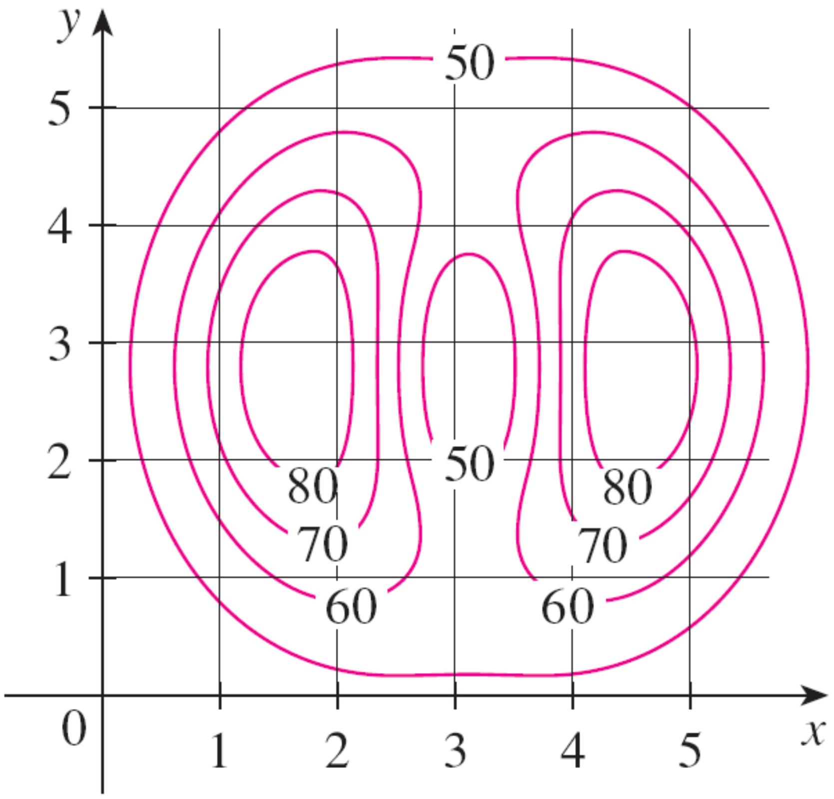




$$f(x, y) = x^2$$



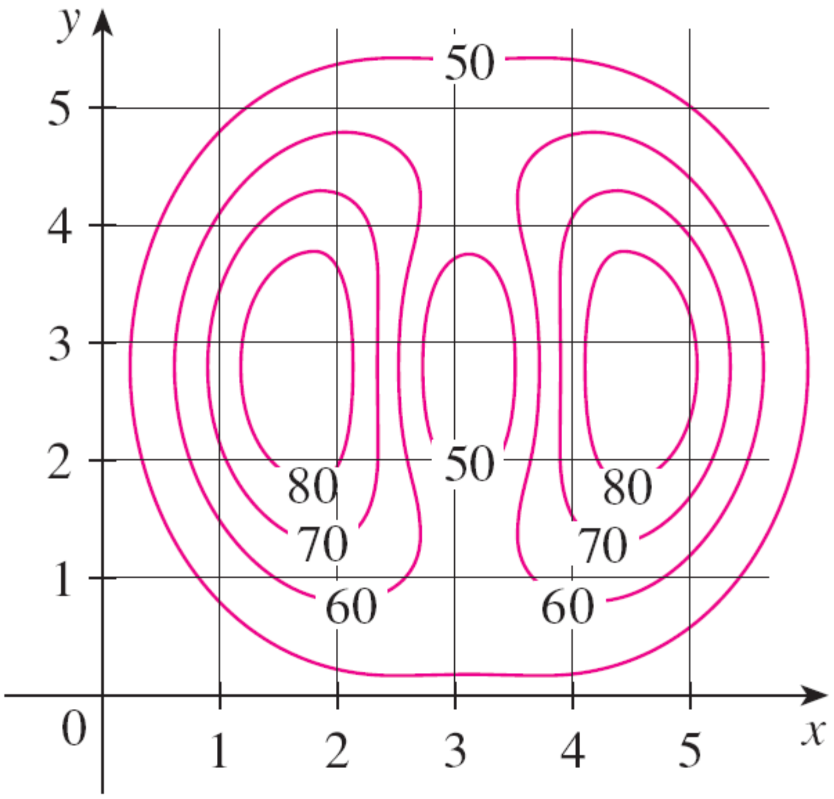
La figura mostra alcune curve di livello di una funzione $z = f(x,y)$



Stimare i valori di $f(1, 3)$ e $f(4, 5)$.

$f(1, 3) \approx 73$

$f(4, 5) \approx 56$



Quesito:

Due curve di livello della funzione

$z = f(x,y)$ corrispondenti a due diversi

livelli non possono intersecarsi.

Perché?

Funzione di tre variabili

Una funzione di tre variabili *x*, *y*, *z* con dominio *D* è una regola che assegna ad ogni terna $(x, y, z) \in D$ **uno ed un solo numero reale**

$$t = f(x, y, z)$$

*x,y,z variabili **indipendenti** (variabili esogene)*

*t variabile **dipendente** (variabile endogena)*

*t è **immagine** di (x,y,z)*

*D **dominio** della funzione*

$$D \subseteq R^3$$

Esempio 1

$$t = f(x, y, z) = \frac{1}{4}x^2yz$$

$$f(2{,}10{,}3) = \frac{1}{4}(2^2)(10)(3) = 30$$

$$D = R^3$$

Esempio 2

$$t = f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$$

$$D = \left\{ (x, y, z) \in R^3 \middle| 1 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0 \right\}$$

GRAFICO

Il grafico di una funzione di tre variabili $t = f(x,y,z)$ è l'insieme dei punti di coordinate $(x, y, z, f(x,y,z))$ al variare di (x,y,z) nel dominio.

$$G = \left\{ (x, y, z, t) \in R^4 \middle| (x, y, z) \in D, t = f(x, y, z) \right\}$$

Funzione di n variabili

Una funzione di *n* variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$ con dominio *D* è una regola che assegna ad ogni ennupla

$$(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \in D$$

uno ed un solo numero reale

$$z = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$$

D ***dominio*** *della funzione* $\boxed{D \subseteq R^n}$

Spazio euclideo n-dimensionale **$\mathbf{R^n}$**

ennuple ordinate di numeri reali

$$\left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \text{ tali che } x_1 \in R,\ x_2 \in R,\ \ldots,\ x_n \in R\right\}$$

GRAFICO *[Def. S.H., pag. 428]*

Il grafico di una funzione di n variabili

$$z = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$$

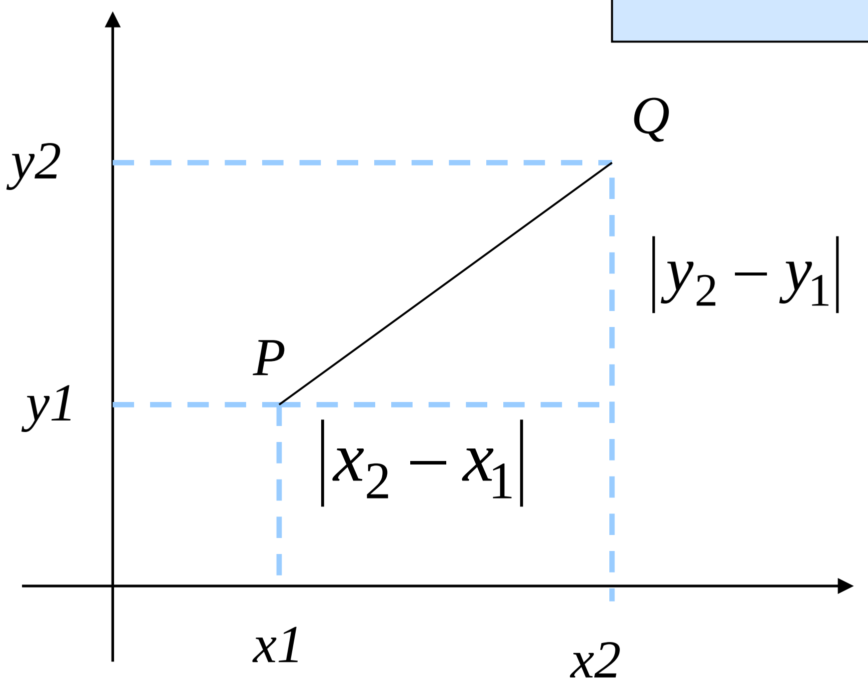
è l'insieme dei punti di coordinate

$$(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)) \in R^{n+1}$$

al variare di $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *nel dominio.*

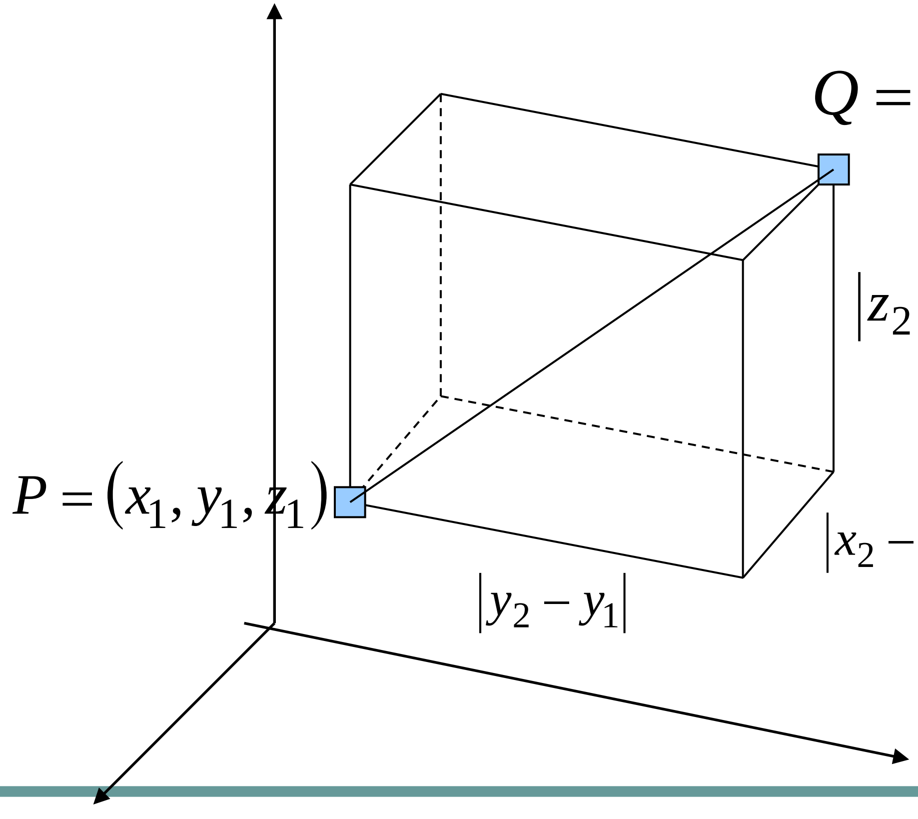
Distanza tra due punti nel piano

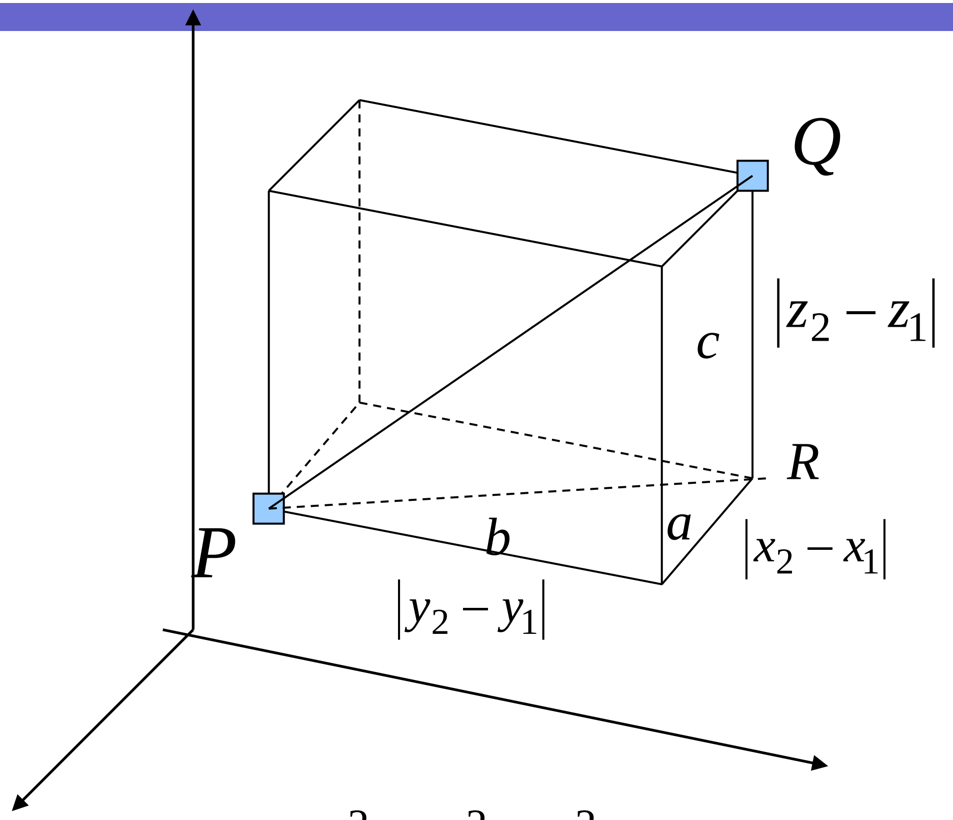
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



Distanza tra due punti nello spazio

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$





$$(PR)^2 = a^2 + b^2$$

$$(PQ)^2 = (PR)^2 + (RQ)^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

$$P = (4,3,2)$$

$$Q = (1,2,3)$$

$$d = \sqrt{(1-4)^2 + (2-3)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{9+1+1} = \sqrt{11}$$

Consideriamo i punti *(x,y,z)* dello spazio la cui distanza dal punto *(a,b,c)* è costante ed uguale ad *r*

$$d = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} = r$$

da cui

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$$

Superficie sferica con centro (a,b,c) e raggio r

$$1 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$$

$$\longrightarrow \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

equazione di una superficie sferica

con centro (0,0,0) e raggio 1

$$1 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0$$

$$\longrightarrow \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$$

cosa rappresenta?