Aumann e la teoria dei giochi

Marco Li Calzi*

(Ottobre 2007)

Introduzione

Nel 2005 il matematico Robert J. Aumann ha ricevuto il premio Nobel per l'Economia[1] in condivisione con T.C. Schelling "per aver approfondito la nostra comprensione dei conflitti e della cooperazione attraverso gli strumenti analitici della teoria dei giochi" [1]. Nel 1994 lo stesso premio è stato conferito al matematico John F. Nash in condivisione con J.C. Harsanyi e R. Selten "per la loro pioneristica analisi degli equilibri nella teoria dei giochi non cooperativi" [2].

Le storie personali di Aumann (nato nel 1930) e Nash (nato nel 1928) sono molto diverse, principalmente per le ragioni rese note al grande pubblico dal film "A beatiful mind" ispirato all'omonima biografia di Nash [3]. Per ragioni di spazio, ci limitiamo a rimandare alle note autobiografiche preparate in occasione del premio [4, 5] e ad un piccolo aneddoto raccontato dallo stesso Aumann [6].

E' stato Nash a introdurre Aumann alla teoria dei giochi. Nel 1953, le loro strade si incrociano al Massachusetts Institute of Technology (MIT). Aumann è un dottorando del Dipartimento di Matematica vicino alla conclusione di una tesi in topologia algebrica sulla teoria dei nodi, sotto la direzione di Whitehead. Nash ha appena ricevuto un prestigioso incarico di insegnamento ("Moore instructorship") riservato a giovani matematici molto promettenti. I due si frequentano abbastanza e fra i problemi di cui conversano c'è la teoria dei duelli. Nel 1956, durante uno *stage* estivo presso i Bell Telephone Laboratories, Aumann riconosce le analogie fra un problema sottoposto al suo gruppo ed i temi delle sue conversazioni con Nash. Così decide di studiare la teoria dei giochi.

Sia Aumann sia Nash hanno avuto un'enorme influenza sullo sviluppo della teoria dei giochi, ma in un modo profondamente diverso che possiamo sintetizzare attraverso l'inversione di due parole. L'attività scientifica di Nash si concentra negli *anni Cinquanta*. L'attività scientifica di Aumann si articola su *cinquanta anni*.

Limitandoci alla teoria dei giochi, proviamo ad esempio a consultare la ricca cronologia curata da Walker [7] e aggiornata fino all'ottobre 2005. Aumann e Nash

* Dipartimento di Matematica Applicata, Università "Ca' Foscari" di Venezia, Dorsoduro 3825/E, 30123 Venezia. Fax: (041) 522-1756. Email: licalzi@unive.it. Ringrazio Achille Basile, Stefano Galavotti, Domenico Menicucci e Cristina Molinari per gli utili commenti.

[1] Il vero nome del premio è The Bank of Sweden Prize in Economic Sciences in Memory of Alfred Nobel. Il premio per l'Economia non era previsto nelle disposizioni di Nobel ed è stato istituito nel 1969.

sono di gran lunga i due nomi più frequenti. Sotto Nash troviamo i suoi quattro lavori fondamentali pubblicati fra il 1950 ed il 1953. Altre otto citazioni indirette confermano che Nash è un eponimo ricorrente [8], a cui sono intestate tre importanti nozioni di teoria dei giochi: l'equilibrio di Nash, la soluzione di Nash ed il programma di Nash. Sotto Aumann troviamo undici lavori scritti fra il 1959 ed il 1985, una citazione indiretta che gli attribuisce l'idea di modellare il concetto di razionalità limitata attraverso la teoria degli automi, la curatela insieme ad Hart di una vera e propria *summa* costituita dai tre tomi dell'*Handbook of Game Theory with Applications* pubblicati fra il 1992 ed il 2002.

In breve, l'impatto di Nash sulla teoria dei giochi è stato esplosivo ma concentrato nei temi. L'influenza di Aumann, invece, è stata ampia e prolungata nel tempo, estendosi ben oltre la sola ricerca. Nella sua lunga carriera, Aumann ha pubblicato sei libri, 85 lavori scientifici, ed un'altra ventina di scritti minori.[2] E' stato relatore per la tesi di dottorato di tredici studenti, dei quali dodici hanno intrapreso con successo la carriera accademica. Secondo il *Mathematics Genealogy Project*, i suoi "discendenti" accademici di secondo grado e oltre sono 114. E' stato invitato come docente presso gli atenei di Princeton, Yale, Berkeley, Lovanio, Stanford, Stony Brook e New York. E' stato il primo Presidente della Game Theory Society, dal 1998 al 2003. E' stato insignito di cinque dottorati onorari, di cui tre (Chicago, Bonn e Lovanio) sono stati conferiti molti anni prima che il premio Nobel sancisse la sua eccellenza.

In questo articolo cerchiamo di illustrare alcuni tra i principali contributi scientifici di Aumann. Naturalmente, la nostra scelta degli argomenti è stata arbitraria ed abbiamo dovuto accettare alcuni compromessi fra leggibilità e precisione matematica. Ci scusiamo con il lettore se abbiamo omesso un tema o un dettaglio importante. Fra le altre presentazioni dell'opera di Aumann, raccomandiamo l'introduzione al volume di scritti in occasione dei suoi 65 anni [9], l'"Advanced information" che accompagna l'annuncio [1] del conferimento del premio Nobel e l'articolo pubblicato dal suo allievo Sergiu Hart [10] nell'anno successivo.

1. – Giustificate obiezioni

In teoria dei giochi esistono due grandi filoni. La teoria noncooperativa studia a quali esiti conduce l'interazione strategica fra gli agenti. La teoria cooperativa esamina come i giocatori si confrontano sulla divisione dei benefici. *Cum grano salis*, possiamo dire che gli economisti tendono a privilegiare l'approccio noncooperativo perché consente loro di costruire modelli di comportamento più accurati, mentre molti matematici trovano maggiormente stimolante l'approccio cooperativo. Nella lezione "Guerra e pace" [11] tenuta in occasione del conferimento del premio Nobel e tradotta in questo volume, Aumann afferma: "Secondo me, [la teoria cooperativa] ha fornito *le* intuizioni principali della teoria dei giochi" (corsivo in originale).

Nella sua versione più semplice, la teoria cooperativa associa ad ogni *coalizione* di agenti un numero che rappresenta l'entità complessiva del beneficio da suddividere

[2] La Hebrew University di Gerusalemme, dove Aumann insegna dal 1956, ospita in formato PDF tutti i suoi scritti (ad eccezione dei libri) nel sito `http://www.ma.huji.ac.il/~raumann/`.

fra i suoi membri. Formalmente, un *gioco in forma cooperativa* consiste di un insieme N di agenti e di una funzione $v : 2^N \to \mathbb{R}$ che associa ad ogni coalizione $S \subseteq N$ un beneficio collettivo $v(S)$. La coalizione vuota non genera nessun beneficio, quindi poniamo $v(\emptyset) = 0$. Inoltre, supponiamo che la funzione v sia *superadditiva*: $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$ per tutte le coalizioni S e T con $S \cap T = \emptyset$; in altre parole, il beneficio associato alla coalizione N di tutti i giocatori è maggiore della somma dei benefici che coalizioni disgiunte possono conseguire separatamente. Questo è sufficiente per indurre giocatori razionali ad associarsi nella coalizione N generando il massimo beneficio collettivo $v(N)$. Il problema aperto è come dividere $v(N)$ fra i giocatori.

Che tipo di proposta possiamo fare? Indichiamo con x_i la quota di $v(N)$ assegnata ad un giocatore i e con $x(S) = \sum_{i \in S} x_i$ la quota che risulta collettivamente attribuita alla coalizione S. Poiché non vogliamo sprecare nulla, è necessario che valga $x(N) = v(N)$ in modo che il beneficio collettivo sia interamente distribuito agli agenti. Ma non basta. Se una coalizione S di agenti aderisse alla nostra proposta, riceverebbe $x(S)$. Rifiutando di aderire, la stessa coalizione può garantirsi un beneficio $v(S)$. Quindi, se vogliamo che i membri della coalizione S aderiscano alla nostra proposta dobbiamo garantire loro un beneficio collettivo $x(S) \geq v(S)$.

Il *nucleo* (in inglese, *core*) di un gioco in forma cooperativa è costituito da tutte le proposte x che soddisfano queste due condizioni: (i) $x(N) = v(N)$; (ii) $x(S) \geq v(S)$ per ogni S. Dal punto di vista economico, il nucleo del gioco raccoglie tutte le proposte per le quali nessuna coalizione può esibire l'ovvia obiezione che secedere le fornisce un beneficio collettivo maggiore. Dal punto di vista matematico, il nucleo è l'insieme di tutti i vettori di benefici individuali che soddisfano un sistema di disequazioni lineari deboli e quindi è un insieme chiuso e convesso.

Le proposte che formano il nucleo soddisfano alcune condizioni minime di ragionevolezza. In qualche caso fortunato, il nucleo è un singoletto: questo elemento rappresenta una proposta ragionevole che può diventare la regola per suddividere i benefici. Ad esempio, supponiamo di avere tre giocatori e la funzione di beneficio

$$v(S) = \begin{cases} 0 & \text{se } |S| \leq 1, \\ a & \text{se } |S| = 2, \\ 1 & \text{se } |S| = 3, \end{cases} \tag{1}$$

secondo la quale ogni individuo ottiene da solo un beneficio nullo, ogni coppia ottiene un beneficio a in $[0, 1]$ ed il trio ottiene un beneficio collettivo uguale a 1. Se $a = 2/3$, l'unica proposta nel nucleo è che ciascuno riceva $1/3$, ossia la terza parte del beneficio collettivo. Considerata la perfetta simmetria della situazione, sembra una soluzione inattaccabile.

In altri casi, il nucleo può essere vuoto; in questo caso, viene meno il punto di riferimento per fare una proposta. Ad esempio, se nel gioco precedente si pone $a > 2/3$, il nucleo risulta vuoto. Persino la proposta di offrire a ciascuno $1/3$ incontra l'obiezione che questo equivale ad offrire ad una coppia un beneficio di $2/3$ quando la coppia stessa può da sola ottenere di più. Al tempo stesso, è rimasta intatta la perfetta simmetria che ci induce a ritenere ancora sensata la proposta di attribuire a ciascuno $1/3$.

Per riuscire a formulare una proposta di distribuzione dei benefici, dobbiamo trovare un concetto di soluzione coerente con il nucleo ma più potente. Ecco l'idea di Aumann [12]. Il nucleo raccoglie tutte le proposte per le quali nessuna coalizione può sollevare obiezioni. Tuttavia, quando le obiezioni possibili sono troppe, si corre il rischio che non sopravviva nessuna proposta. Dobbiamo trovare un modo di prendere in considerazione soltanto obiezioni "giustificate". Accanto all'elenco delle possibili obiezioni, dunque, introduciamo un secondo elenco di controbiezioni ammissibili e consideriamo "giustificate" soltanto le obiezioni per quali non esistono controbiezioni valide.

Su questa base possiamo definire un concetto di soluzione più potente. Una proposta x è *ammissibile* se non distribuisce più di quanto sia disponibile, ovvero se $x(N) \leq v(N)$. Chiamiamo *imputazione* una proposta ammissibile x che soddisfi l'ovvio vincolo di razionalità individuale per il quale ad ogni individuo i va comunque attribuito un beneficio non inferiore a quanto può ottenere da solo: $x_i \geq v(\{i\})$.

Un'*obiezione* di i contro j relativamente ad un'imputazione x è costituita da una coppia (y, S), dove S è una coalizione che include i ma non j ed y è una proposta ammissibile tale che $y_k > x_k$ per ogni k in S. Questa definizione cattura l'idea che l'unico genere di obiezioni che un giocatore i possa sollevare contro la proposta x sia del tipo: "La proposta x mi attribuisce troppo poco e concede troppo a j; contro di essa posso mettere insieme una coalizione S che lascia fuori j e garantisce a tutti i partecipanti un beneficio strettamente superiore a quanto previsto da x".

Una *controbiezione* di j all'obiezione (y, S) di i è costituita da una coppia (z, T), dove T è una coalizione che include j ma non i e z è una proposta ammissibile tale che $z_k \geq x_k$ per ogni k in $T \setminus S$ e $z_k \geq y_k$ per ogni k in $T \cap S$. In questo caso, l'argomento con cui j mette a tacere l'obiezione di i è il seguente: "Ma io posso formare una coalizione T che invece lascia fuori te, garantendo ai partecipanti che non sono in S un beneficio non inferiore a quanto previsto da x e agli altri giocatori che tu vorresti arruolare in S un beneficio non inferiore a quello che tu intendi offrire. Dunque la tua obiezione non è giustificata".

L'*insieme contrattabile* è formato da tutte le imputazioni x tali che ad ogni obiezione (y, S) di un giocatore i verso un altro giocatore j relativamente a x quest'ultimo possa opporre una controbiezione. Naturalmente, un'imputazione è nel nucleo di un gioco se e solo se nessun giocatore dispone di obiezioni contro un altro giocatore; pertanto, il nucleo è un sottoinsieme dell'insieme contrattabile. Inoltre, si può dimostrare che l'insieme contrattabile è sempre non vuoto. Ne segue che questo concetto di soluzione è coerente con il nucleo ma non ci lascia mai a corto di proposte per la distribuzione di un beneficio collettivo. Ad esempio, tornando al gioco in forma cooperativa fra tre persone definito da (1) per $a > 2/3$, l'insieme contrattabile (a differenza del nucleo) è non vuoto e corrisponde al singoletto $x = (1/3, 1/3, 1/3)$. Alla perfetta simmetria tra i giocatori corrisponde un perfetto equilibrio tra obiezioni e controbiezioni che finisce per selezionare la stessa proposta già suggerita dalla nostra intuizione.

L'insieme contrattabile ha ispirato direttamente la ricerca di altri concetti di soluzione per i giochi in forma cooperativa che sono stati sviluppati, insieme ad altri, da due allievi di Aumann: Peleg e Schmeidler. Per una eccellente presentazione dei concetti principali (*nocciolo*, *nucleolo* e *valore di Shapley*) in termini di obiezioni e controbiezioni si veda il capitolo 14 in [13]. Vale la pena segnalare che per questo materiale gli autori dichiarano un esplicito debito verso gli appunti del corso tenuto da Aumann presso l'università di Stanford negli anni Settanta [14].

2. – Cooperazione e mano invisibile

La forma cooperativa dei giochi può essere usata in modo molto naturale per rappresentare le caratteristiche di un'economia. Ad esempio, consideriamo la situazione dove un capitalista c possiede una fabbrica nella quale lavora un insieme W di w operai [13]. Gli operai da soli non possono produrre nulla; associandosi con il capitalista, un gruppo di m operai può produrre una quantità $f(m)$ dove $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ è una funzione limitata, crescente e concava con $f(0) = 0$. Il gioco in forma cooperativa che corrisponde a questa situazione è costituito dall'insieme $N = \{c\} \cup W$ e dalla funzione di beneficio

$$v(S) = \begin{cases} 0 & \text{se } c \notin S, \\ f(|S \cap W|) & \text{se } c \in S. \end{cases}$$

Il nucleo di questo gioco è costituito dall'insieme dei vettori x in $\mathbb{R}^{|N|}$ tali che $0 \leq x_i \leq f(w) - f(w-1)$ per i in W e $\sum_{i \in N} x_i = f(w)$. Il nucleo contiene diverse proposte possibili, ma in ogni caso nessun operaio riceve più del contributo marginale $f(w) - f(w-1)$ ed il capitalista riceve tutto il resto. Intuitivamente, il capitalista riesce a sfruttare la concorrenza fra gli operai per limitare il beneficio a cui ciascuno di questi può aspirare.

Possiamo confermare questa intuizione chiedendoci che cosa avviene all'aumentare del numero w degli operai. Sotto le nostre ipotesi, $\lim_{w \to +\infty} f(w) - f(w-1) = 0$. Quindi, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un numero intero w_ε di operai tale che per ogni $w > w_\varepsilon$ nessuna proposta nel nucleo assegna al capitalista un beneficio inferiore a $f(w) - \varepsilon$. Quando il numero degli operai tende a infinito, il capitalista si appropria di tutta la produzione perché il peso contrattuale di ciascun operaio diventa zero.

Lo studio di situazioni in cui tutti gli agenti di un'economia hanno peso contrattuale nullo è stata un motivo ricorrente nello sviluppo della teoria economica del secolo scorso [15]. Dal punto di vista economico, l'assenza di peso contrattuale è necessaria per giustificare l'ipotesi di *concorrenza perfetta*, secondo la quale ogni agente tratta i prezzi come dati e ignora l'effetto che su questi hanno le sue stesse azioni. Si tratta di un'ipotesi estrema, che consente di semplificare drasticamente lo studio dei modelli economici e dimostrare l'esistenza dell'equilibrio economico generale, basato su un sistema di prezzi rispetto ai quali gli agenti ottimizzano le loro scelte di produzione e di consumo. In ipotesi di concorrenza perfetta, i prezzi costituiscono la "mano invisibile" invocata dall'economista e filosofo Adam Smith (1723–1790) come il principio che inconsapevolmente coordina le azioni individuali verso un'allocazione paretiana.[3]

Da un punto di vista generale, tuttavia, la conclusione che in un'economia perfettamente concorrenziale il sistema dei prezzi conduce ad un equilibrio paretiano

[3] Un'allocazione paretiana rappresenta una situazione in cui non si può migliorare il benessere di un individuo senza danneggiarne un altro.

presuppone l'esistenza dei prezzi e dunque aggira una domanda fondamentale. Supponiamo che gli agenti non abbiano ancora deciso quali sono le istituzioni che regolamentano le loro interazioni economiche. Prezzi e mercati non sono dati, quindi l'ipotesi di concorrenza perfetta non è ammissibile; tuttavia, possiamo sostituirla con l'assunzione che tutti gli agenti abbiano un peso contrattuale nullo. In questo caso, dobbiamo aspettarci ancora che l'esito finale del processo sia lo stesso a cui condurebbe un sistema dei prezzi? In altre parole, se lasciamo gli agenti completamente liberi di organizzarsi, finiranno per raggiungere le stesse posizioni a cui li condurrebbe un'economia perfettamente concorrenziale?

Un esempio può esserci di aiuto. Consideriamo un'economia molto semplificata, dove un solo fattore produttivo (latte) è utilizzato per produrre un unico bene (yogurt) e ogni agente dispone della stessa tecnologia, che trasforma latte in yogurt secondo un processo produttivo descritto dalla funzione $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$. Ogni agente i possiede una dotazione iniziale e_i di latte. Supponiamo che la funzione di produzione f sia continua, crescente e concava. Gli agenti possono cooperare redistribuendo fra di loro il fattore produttivo in modo da massimizzare la produzione complessiva di yogurt. Questa riallocazione delle quote di latte attribuisce ad ogni agente una quantità z_i di fattore produttivo da trasformare in yogurt, sotto il vincolo $\sum_{i\in N} z_i = \sum_{i\in N} e_i$ secondo il quale può essere riallocata tutta e sola la dotazione iniziale complessiva di latte. Come sopra, resta aperto il problema di come distribuire i benefici di questa cooperazione.

Possiamo modellare questa economia come un gioco in forma cooperativa mediante la funzione di beneficio

$$v(S) = \max_z \left\{ \sum_{i\in S} f(z_i) : \; z_i \in \mathbb{R}_+ \text{ e } \sum_{i\in S} z_i = \sum_{i\in S} e_i \right\},$$

che associa ad ogni coalizione S di agenti la massima produzione complessiva di yogurt che i membri di S possono produrre da soli. Il nucleo di questo gioco rappresenta l'insieme delle proposte di allocazione z per le quali nessuna coalizione può esibire l'obiezione che l'autarchia le metterebbe a disposizione una produzione maggiore.

Si dimostra che il nucleo di questo gioco è sempre non vuoto, ma in generale non è un singoletto. Dunque, se lasciamo gli agenti liberi di contrattare un'allocazione per la quale nessuna coalizione possa sollevare l'obiezione autarchica, sono possibili diverse soluzioni. Un risultato importante, notato per la prima volta da Edgeworth [16] nel 1881, è che l'equilibrio in ipotesi di concorrenza perfetta produce un'allocazione che è sempre contenuta nel nucleo di questo gioco.

La dimostrazione di questo notevole risultato per il nostro esempio semplificato non è difficile. Sia $\overline{e}_S = \left(\sum_{i\in S} e_i\right)/|S|$ la dotazione iniziale media di una coalizione S. Data la concavità della funzione di produzione f, il massimo beneficio $v(S)$ si ottiene in corrispondenza dell'allocazione in cui ogni agente in S riceve $z_i = \overline{e}_S$. Sia g un elemento del sopradifferenziale di f in $\overline{e}_N$. L'allocazione $g(e_i)$ appartiene al nucleo perché

$$v(S) = |S| \cdot f(\overline{e}_S) \leq |S| \cdot g(\overline{e}_S) = \sum_{i\in S} g(e_i)$$

e naturalmente

$$v(N) = |N| \cdot f(\overline{e}_N) = |N| \cdot g(\overline{e}_N) = \sum_{i \in N} g(e_i).$$

L'allocazione $g(e_i)$ si ottiene facilmente consentendo ad ogni agente i di scambiare latte per yogurt ad un prezzo p^* uguale alla pendenza di g. In questo caso, infatti, la decisione che massimizza il suo beneficio individuale $f(z_i) - p^*(z_i - e_i)$ è scegliere proprio la quantità $z_i^* = \overline{e}_N$. Chi ha una dotazione iniziale superiore a $\overline{e}_N$ venderà l'eccedenza a chi ha una dotazione iniziale inferiore a $\overline{e}_N$ ed il mercato si troverà in un equilibrio perfettamente concorrenziale.

Nella nostra semplice economia con un solo fattore produttivo ed un solo bene, l'uso di un opportuno prezzo genera un'allocazione contenuta nel nucleo. Il risultato si estende ad economie con più fattori produttivi e più beni. Un opportuno sistema di prezzi realizza un equilibrio perfettamente concorrenziale a cui è associata una distribuzione dei benefici contenuta nel nucleo del corrispondente gioco in forma cooperativa.

In generale, il nucleo contiene anche altre allocazioni, corrispondenti ad una diversa distribuzione dei benefici. Quindi l'allocazione raggiunta attraverso un sistema dei prezzi non è l'unico modo in cui gli agenti potrebbero decidere di organizzare la loro economia. Tuttavia, quando il peso contrattuale di ogni agente tende a zero, questo non è più vero. Un importante *principio di equivalenza* afferma che, quando il peso contrattuale degli agenti tende a zero, ogni allocazione nel nucleo di un gioco corrisponde ad un equilibrio di concorrenza perfetta. Intuitivamente, qualsiasi siano i precisi dettagli circa il modo in cui gli agenti si dividono i benefici, si può sempre individuare un sistema di prezzi di mercato che fornisce lo stesso risultato. Fondare le istituzioni economiche su un sistema di prezzi non è restrittivo.

Dal punto di vista matematico, per dimostrare che il nucleo e l'insieme degli equilibri di concorrenza perfetta coincidono, occorre formalizzare la nozione che tutti gli agenti hanno peso contrattuale nullo. Nel 1963, Debreu e Scarf presentano un approccio asintotico nel quale si fa tendere ad infinito il numero degli agenti e si studia il limite del nucleo. Nel 1964, Aumann ha un'idea più drastica [17]: "L'influenza di un singolo partecipante all'economia non può essere matematicamente trascurabile, se il numero dei partecipanti è finito. Quindi un modello matematico adeguato per la nozione intuitiva di concorrenza perfetta deve contenere un numero infinito di partecipanti. [...] Il modello più naturale a questo scopo si basa su un continuo di partecipanti, simile al continuo dei punti su una retta o al continuo delle particelle in un fluido."

Secondo l'approccio di Aumann, l'insieme A degli agenti è uno spazio di misura nonatomico. La dotazione iniziale *media* di una coalizione (misurabile) S corrisponde ad un integrale $\int_S e(a)\, \mathrm{d}\mu$; in modo analogo si rappresentano la domanda o l'offerta *media* di una coalizione. Poiché lo spazio degli agenti è nonatomico, risulta immediato che l'influenza di un agente è nulla. Si noti che, per definire nel giusto grado di generalità questi integrali, Aumann ha fornito un importante contributo alla teoria dell'integrazione per le corrispondenze [18].

L'approccio asintotico è elementare ed è quello tradizionalmente usato per presentare il principio di equivalenza ai dottorandi in economia. Tuttavia, esso ottiene la conclusione soltanto al limite. L'approccio di Aumann usa invece una matematica più avanzata che fornisce la giusta rappresentazione, con due importanti vantaggi. Primo, le ipotesi sono molto più deboli: non sono richieste la convessità o la monotonia delle preferenze e non è necessario che le dotazioni iniziali siano limitate. Secondo, vale la diretta eguaglianza fra nucleo ed insieme delle allocazioni di equilibrio in concorrenza perfetta.

3. – Repetita iuvant

Spostiamo la nostra attenzione sull'approccio noncooperativo, che studia a quali esiti conduce l'interazione strategica fra gli agenti. Formalmente, un *gioco in forma strategica* consiste di un insieme N di agenti $i = 1, 2, \ldots, n$ ciascuno dei quali sceglie simultaneamente quale strategia adottare nell'insieme S_i. Il vettore $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ delle strategie adottate dai giocatori determina per ciascun giocatore i un'utilità $u_i(s)$.

Ad esempio, immaginiamo una situazione con due giocatori che devono scegliere un'azione all'insaputa dell'altro. L'esempio più noto è il *Dilemma del prigioniero*.[4] La polizia ha fermato due pregiudicati che devono scontare un anno di prigione ciascuno per un crimine minore. Il procuratore sospetta (ma non può provare) che i due malfattori siano complici in un crimine maggiore, punibile con ulteriori cinque anni di prigione. Nel tentativo di renderli punibili per il crimine maggiore, il giudice separatamente fa a ciascuno di loro la stessa proposta: "Se accusi il tuo socio del crimine maggiore, ti abbuono l'anno di prigione per il crimine minore. E, se il tuo socio non ti implica nel crimine maggiore (nel qual caso dovrai farti cinque anni di prigione), ti libero subito."

Se descriviamo questa situazione come un gioco tra i due pregiudicati, ciascuno di loro ha due strategie (accusare il socio o no) e come funzione di utilità l'opposto del numero di anni di prigione che rischia di farsi. L'interazione strategica fra i due pregiudicati — chiamiamoli Tom e Jerry — può essere rappresentata mediante una matrice dove Tom sceglie la riga e Jerry la colonna. Ad esempio, se Tom *(a)*ccusa il suo complice ma Jerry *(n)*on lo accusa, Tom ottiene 0 anni di prigione e Jerry 6, a cui corrispondono rispettivamente un'utilità di 0 per Tom e di -6 per Jerry. La

		Jerry	
		a	n
Tom	a	$-5, -5$	$0, -6$
	n	$-6, 0$	$-1, -1$

Figura 1: Il Dilemma del prigioniero.

Figura 1 riporta la matrice delle utilità, sotto la convenzione che il primo numero designa l'utilità di Tom ed il secondo l'utilità di Jerry.

L'approccio noncooperativo studia in quale modo due agenti razionali dovrebbero

[4] Una scena dell'episodio "Dirty bomb" (n. 10) della serie televisiva *Numb3rs* si ispira a questo gioco.

affrontare questa situazione. Il concetto di soluzione più noto è l'equilibrio di Nash[5] ma, in questo caso, la risposta si può ottenere in modo diretto. Si consideri la posizione di Tom. Se Jerry gioca a e lo accusa, Tom preferisce giocare a perché in questo modo deve scontare 5 anni di prigione invece di 6. D'altra parte, se Jerry *n*on lo accusa, Tom preferisce comunque giocare a perché in questo modo esce di prigione invece di scontare un anno. Qualsiasi cosa Jerry finisca per giocare, Tom consegue un'utilità maggiore giocando a. Formalmente, si dice che per Tom la strategia a *domina* la strategia n nel senso che gli arreca sempre un'utilità superiore, qualsiasi cosa faccia Jerry: $u_T(a, s_J) \geq u_T(n, s_J)$ per ogni s_J. Data la simmetria, si può ripetere il ragionamento a parti invertite e concludere che la strategia a è dominante anche per Jerry. Quindi, la previsione (e la nostra raccomandazione) è che ciascun giocatore dovrebbe accusare il suo socio. Questo è anche l'unico equilibrio di Nash del gioco e, naturalmente, ciò in cui spera il procuratore.

La fama del Dilemma del prigioniero discende dal fatto che la soluzione "ovvia" illustra il potenziale conflitto fra razionalità individuale e benessere collettivo. Se entrambi gli agenti si attenessero ad un codice di omertà giocando n, ognuno dovrebbe scontare soltanto un anno di prigione. Tuttavia, la soluzione individualmente razionale prevede che si accusino a vicenda finendo per accollarsi cinque anni di galera a testa. In altre parole, perseguendo la massima utilità individuale, i giocatori finiscono per produrre un risultato collettivo dannoso per entrambi. Come discutiamo con maggior dettaglio in [8], le ragioni individuali prevalgono sulla razionalità collettiva; ovvero, il conflitto fra gli individui impedisce l'emergere della cooperazione — nel nostro esempio, l'omertà.

Se talvolta il conflitto fra le ragioni individuali ostacola la cooperazione, è naturale chiedersi sotto quale condizioni sia possibile riconciliare la razionalità collettiva con quella individuale. E' a questa domanda che fa riferimento la motivazione del premio Nobel conferito ad Aumann, citata nell'apertura di questo articolo, dove menziona l'approfondimento "della nostra comprensione dei conflitti e della cooperazione attraverso gli strumenti analitici della teoria dei giochi" [1]. In termini tecnici, il premio riconosce il ruolo di Aumann nello sviluppo della teoria dei giochi ripetuti. Qui vediamo solo l'idea principale, nel contesto di un esempio noto come *duopolio di Cournot*. Gli altri contributi di Aumann nell'ambito della teoria dei giochi ripetuti sono efficacemente presentati in [10].

Consideriamo un mercato servito soltanto da due produttori di tonno, che devono scegliere simultaneamente la quantità di tonno da mettere in vendita. Per semplicità, supponiamo che entrambi i produttori abbiano costi di produzione nulli e che, se la quantità di tonno immessa sul mercato è q, essa può essere venduta al prezzo $p(q) = a - q$. Nei termini di un gioco in forma strategica, questo duopolio corrisponde ad una situazione in cui ciascuno dei due giocatori $i = 1, 2$ deve scegliere una quantità q_i in $[0, a]$ cercando di massimizzare il suo profitto $\pi_i = q_i \cdot p(q_1 + q_2)$.

L'unico equilibrio di Nash prevede che ciascuno dei giocatori produca la stessa quantità $q_i^* = a/3$, a cui corrisponde un prezzo di equilibrio $p^* = a/3$ ed un profitto individuale $\pi_i^* = a^2/9$. Questa è la predizione basata sulle ragioni individuali. Tuttavia, come nel Dilemma del prigionero, ci sono esiti "cooperativi" che migliorano i

[5] Diamo per nota questa nozione, già presentata su questa rivista in [8].

profitti di entrambi. Il più appetitoso fra gli esiti simmetrici divide a metà i profitti che il mercato consentirebbe ad un monopolista. Se ciascuno dei due produttori limita la sua produzione a $q_i^m = a/4$, il prezzo sale a $p^m = a/2$ ed il profitto individuale diventa $\pi_i^m = a^2/8 > a^2/9 = \pi_i^*$. La situazione è del tutto analoga al Dilemma del prigioniero. Seguendo le ragioni individuali, i duopolisti si fanno concorrenza e questo danneggia i loro profitti. Se trovassero un modo di "colludere" sul prezzo di monopolio, entrambi ne trarrebbero beneficio.

L'idea sottesa alla teoria dei giochi ripetuti è che basta allargare il punto di vista. I duopolisti mettono in vendita il tonno ogni giorno. Il tonno fresco è una merce deperibile, quindi ogni giorno si ripropone la stessa situazione descritta sopra. Preso atto che sono destinati a giocare sempre lo stesso gioco, i duopolisti possono far dipendere ciò che fanno oggi dalla storia passata. Ad esempio, se ieri la concorrenza è stata aggressiva e ha prodotto q_2^*, oggi il primo duopolista può punire questa azione rispondendo in modo aggressivo e producendo q_1^*. Se invece ieri la concorrenza è stata benevola e ha prodotto q_2^m, oggi il primo agente può restituire il favore producendo q_1^m. In questo modo, si può sperare di indurre un comportamento cooperativo con la promessa di ricambiare in futuro e la minaccia di punire le scelte aggressive. In breve, *repetita iuvant...* alla cooperazione.

La teoria dei giochi ripetuti studia sotto quali condizioni un comportamento individualmente razionale riesce a sostenere indefinitamente la cooperazione. Nel caso del duopolio di Cournot, ad esempio, se i duopolisti attribuiscono sufficiente importanza al futuro, esistono equilibri di Nash in cui ogni giorno i giocatori riescono a dividersi i profitti di monopolio. Nel caso del Dilemma del prigioniero, sotto analoga condizione, esistono equilibri di Nash in cui i due prigionieri preferiscono seguire il codice di omertà. In generale, gli equilibri che in un'interazione ripetuta riescono a riconciliare ragioni individuali e razionalità collettiva sono sostenuti da due elementi: il primo è la promessa (razionale) che la cooperazione oggi sarà ricambiata domani ed il secondo è la minaccia (anch'essa razionale) che far venire meno la cooperazione oggi condurrà domani ad una punizione. La versione più popolare di una strategia basata su questi principî — con evidente ascendenza biblica — è nota con il nome di "occhio per occhio, dente per dente" (in inglese, *tit for tat*[6]): domani giocherò come il mio avversario ha giocato oggi.

4. – Una nozione di equilibrio più generale

Nel film *Gioventù bruciata* (titolo originale: *Rebel without a cause*) del 1955 c'è una scena molto nota. In una sfida incosciente per dimostrare chi sia più coraggioso, due giovinastri (Jim e Buzz) lanciano la propria auto a tutta velocità verso un precipizio. Il primo a scendere dall'auto in corsa perde la gara e la faccia, rivelandosi come un "fifone". Purtroppo Buzz resta incastrato e non riesce ad aprire la portiera, concludendo la sua corsa tragicamente.

Se escludiamo questo genere di fatalità e semplifichiamo drasticamente la situazione, possiamo rappresentare il problema come un gioco in forma strategica in cui

[6] Una scena dell'episodio "The art of reckoning" (n. 58) della serie televisiva *Numb3rs* si ispira a questa strategia.

ciascuno dei due giocatori sceglie se (a)bbandonare l'auto a 30 metri dal precipizio oppure solo (d)opo che l'altro sia sceso. La matrice di sinistra nella Figura 2 riporta le utilità dei giocatori. Ad esempio, se Jim abbandona l'auto e Buzz aspetta, Jim

		Buzz a	Buzz d
Jim	a	$6,6$	$2,7$
	d	$7,2$	$0,0$

	a	d
a	$4/9$	$2/9$
d	$2/9$	$1/9$

Figura 2: Il gioco del fifone.

salva la vita ma viene etichettato come un fifone: la sua utilità è 2 mentre quella di Buzz è 7. Se entrambi aspettano, il precipizio assicura che la loro utilità sia 0. Se entrambi abbandonano, nessuno vince e nessuno fa la figura del fifone: l'utilità è 6.

Consideriamo come due agenti razionali dovrebbero affrontare la situazione. Anzitutto, osserviamo che nessuna strategia domina l'altra. Quando Buzz gioca a, Jim preferisce giocare d e dimostrare il suo "coraggio"; ma quando Buzz gioca d, Jim preferisce giocare a: meglio un fifone vivo che un eroe morto. La strategia che risulta migliore dipende da che cosa fa l'avversario e quindi non c'è un modo ovvio di giocare, al contrario di quanto avviene nel Dilemma del prigioniero. Proviamo ad applicare il concetto di equilibrio di Nash.

I primi due equilibri del gioco del fifone sono (d, a) e (a, d). La loro interpretazione è molto naturale: uno dei giocatori scende prima ed uno dopo; ovvero, uno assume il ruolo del fifone e l'altro no. L'utilità che i giocatori conseguono è rispettivamente 2 e 7. Gli equilibri sono due perché, dal momento che il ruolo dei due giocatori è simmetrico, non è possibile stabilire *a priori* chi debba ritrovarsi a fare il fifone. Questo pone un delicato problema di coordinamento: se Jim gioca d pensando che l'equilibrio "giusto" sia il primo mentre Buzz fa lo stesso ritenendo che l'equilibrio "giusto" sia il secondo, i due rischiano di finire entrambi nel precipizio.

Il terzo (e ultimo) equilibrio del gioco consente a ciascuno dei due giocatori di scegliere quale strategia giocare con l'ausilio di un dado o di un altro dispositivo casuale. In particolare, l'equilibrio di Nash prescrive che ciascun giocatore giochi a con probabilità 2/3 e d con probabilità 1/3. Poiché le due casualizzazioni sono stocasticamente independenti, la distribuzione congiunta di probabilità sui quattro possibili esiti è descritta dalla matrice sul lato destro della Figura 2. In questo caso, il valore atteso dell'utilità è $6 \cdot (4/9) + 2 \cdot (2/9) + 7 \cdot (2/9) = 14/3 \approx 4{,}67$ per entrambi i giocatori.

Se ci limitiamo a considerazioni di simmetria e equità, questo terzo equilibrio sembra preferibile. Nessuno dei giocatori ha un ruolo privilegiato: entrambi hanno la stessa probabilità di far la parte del fifone. Inoltre, anche se questo è in parte un artificio, la somma (dei valori attesi) delle utilità conseguite è superiore nel terzo equilibrio. A fronte di questi vantaggi, tuttavia, con probabilità 1/9 il terzo equilibrio conduce entrambi i giocatori nel precipizio. Sembra azzardato proporre ai giocatori di correre questo rischio pur di ottenere un equilibrio simmetrico.

Riassumiamo il problema. Non sappiamo come scegliere fra i primi due equilibri e questa indecisione crea il rischio che l'assenza di coordinazione conduca entrambi i giocatori nel precipizio. Il terzo equilibrio assicura che questo evento infausto si manifesti con probabilità positiva. Possiamo limitarci ad osservare che, ancora una volta, le ragioni individuali implicite nella nozione di equilibrio limitano la gamma delle soluzioni di un gioco. Oppure possiamo chiederci se non esista un punto di vista diverso che generi equilibri migliori.

Il concetto di equilibrio di un gioco si fonda su un principio di razionalità individuale: ogni giocatore massimizza la sua utilità tenuto conto di quanto fanno gli altri. L'osservazione chiave di Aumann [19] è che la nozione di Nash impone una seconda restrizione, che è naturale ma non indispensabile. Illustriamo l'idea tornando al gioco del fifone. Nei primi due equilibri di Nash, i giocatori decidono da soli quale strategia desiderano giocare. Nel terzo equilibrio di Nash, ciascuno di loro si fa aiutare nella scelta da un dispositivo casuale privato. Il dispositivo casuale è privato nel senso che ognuno dei giocatori fa uso del proprio dado senza rivelare nulla all'avversario. Pertanto, in ognuno di questi equilibri, le distribuzioni di probabilità sulle strategie giocate sono stocasticamente indipendenti. La definizione di equilibrio di Nash presume che valga sempre la proprietà di indipendenza stocastica.

Se rinunciamo all'ipotesi di indipendenza stocastica, esistono altri equilibri che consentono ai giocatori di coordinare parzialmente le loro strategie senza sacrificare le ragioni individuali. Intuitivamente, bisogna trovare il modo di "correlare" le scelte senza rivelare troppo all'avversario. Il modo più semplice consiste nel far ricorso ad un dispositivo casuale pubblico. Supponiamo che Jim e Buzz chiedano ad un mediatore fidato di lanciare segretamente un unico dado, rivelando a ciascuno di loro un'informazione parziale e diversa sull'esito x del lancio. Se Jim apprende "$x \leq 4$", allora gioca a; se invece gli viene rivelato "$x \geq 5$" allora gioca d. In modo simile (ma non identico!), se Buzz sente "$x \leq 2$" allora gioca d; se invece apprende "$x \geq 3$" allora gioca a. La distribuzione di probabilità congiunta sulle strategie giocate che ne risulta è rappresentata nella matrice seguente:

	a	d
a	1/3	1/3
d	1/3	0

Confrontando questa matrice con quella sulla destra della Figura 2, si vede subito che la distribuzione di probabilità sulle strategie giocate da un solo agente è la stessa del terzo equilibrio di Nash. La distribuzione congiunta, invece, non soddisfa l'ipotesi di indipendenza stocastica.

D'altra parte, il principio di razionalità individuale è ancora soddisfatto. Dimostriamolo prendendo il punto di vista di Jim; il ragionamento per Buzz è analogo. Jim deve decidere se giocare a o d. Tenendo fermo quanto fa Buzz, dobbiamo far vedere che Jim massimizza la sua utilità giocando a quando sente "$x \leq 4$" e d quando apprende "$x \geq 5$". Supponiamo che a Jim sia rivelato "$x \leq 4$". Jim non sa se vale "$x \leq 2$" o "$3 \leq x \leq 4$". Dal suo punto di vista questi due eventi sono equiprobabili, ma nel primo caso Buzz gioca d e nel secondo a. Pertanto, se Jim sceglie a, il valore atteso della sua utilità risulta $(1/2) \cdot 2 + (1/2) \cdot 6 = 4$; se invece gioca d, il valore atteso è $(1/2) \cdot 7 = 3{,}5$. Poiché a conduce ad un'utilità maggiore, questa è una scelta razionale per Jim. Supponiamo ora che a Jim sia rivelato "$x \geq 5$". Poiché questo implica “$x \geq 3$”, Jim sa che Buzz gioca a e dunque Jim effettivamente massimizza la sua utilità scegliendo d.

La situazione che abbiamo descritto è nota con il nome di *equilibrio correlato.* Come in ogni equilibrio di Nash, tutti i giocatori si attengono ad un principio di razionalità individuale. Tuttavia, le distribuzioni di probabilità sulle strategie giocate non sono necessariamente stocasticamente indipendenti. Questo implica che l’insieme degli equilibri correlati di un gioco contiene l’insieme dei suoi equilibri di Nash. Relativamente al gioco del fifone, i vantaggi dello specifico equilibrio correlato che abbiamo proposto sono evidenti: esso soddisfa le stesse considerazioni di simmetria del terzo equilibrio di Nash, ma produce per ciascuno di essi un valore atteso dell’utilità superiore (5 invece di 4,67) ed esclude il rischio di condurre entrambi i giocatori nel precipizio.

5. – Io so che tu sai che io so. . .

Il re Pico Legno ha scoperto un curioso problema di logica a p. 3 del piccolo zibaldone matematico di un suo omonimo [20] ed ha escogitato una variante da far giocare ai due prigionieri che languiscono nella sua prigione. Dopo averli convocati insieme alla sua presenza, il re spiega ai due prigionieri che durante la notte ha fatto scrivere sulla fronte di ciascuno di loro un numero. I due numeri sono interi consecutivi. Ciascun prigioniero può vedere il numero scritto sulla fronte dell’altro, ma non il proprio. I prigionieri non possono comunicare fra loro. Ad ogni tocco dell’ora, il re chiede loro se sanno quali sono i due numeri. I due giocatori scrivono simultaneamente la loro risposta, che è letta soltanto dal re. Ciascun prigioniero deve scrivere “passo” oppure una coppia di interi consecutivi. Quando almeno uno dei giocatori scrive una coppia di numeri, il gioco termina. Gli esiti possibili sono tre: la grazia per chi ha indovinato i numeri giusti, la condanna a morte per chi li ha scritti sbagliati, e la continuazione della detenzione per chi ha passato anche nell’ultimo turno.

Supponiamo che i due prigionieri di Pico Legno siano razionali e che i due numeri siano 3 e 4. Con ovvio significato, battezziamo i prigionieri Terzo e Quarta. Terzo (che vede 4 sulla fronte di Quarta) non ha modo di sapere se il suo numero sia 3 o 5. Per evitare il rischio di farsi condannare a morte, gli conviene scrivere “passo”. Lo stesso vale per Quarta. Così, anche dopo una dozzina di tentativi, i due prigionieri di Pico Legno continuano a passare. A un certo punto, il re annuncia ufficialmente alla presenza di entrambi che i numeri interi scritti sulla fronte dei prigionieri sono strettamente positivi. Al terzo tocco successivo, Quarta (che vede un 3 sulla fronte dell’altro) indovina i due numeri e ottiene la grazia. Che cosa è cambiato?

L’annuncio del re consente di escludere che uno dei numeri sia zero. Dopo il primo tocco successivo all’annuncio, giacché nessuno ha parlato, si può escludere anche che uno dei numeri sia 1: sapendo che 0 è impossibile, chi avesse visto 1 sulla fronte dell’altro avrebbe indovinato che l’altro numero deve essere 2. Analogamente, dopo il secondo tocco si può escludere il 2: se 0 e 1 sono impossibili, chi avesse visto 2 avrebbe indovinato che l’altro numero deve essere 3. Al terzo tocco, quindi, Quarta (che vede un 3) può dedurre che l’altro numero deve essere 4, annunciare la coppia giusta ed ottenere la grazia.

Questo *puzzle* logico illustra come si possano avere livelli di conoscenza diversi di uno specifico fatto. Consideriamo la proposizione P: "entrambi i numeri sono strettamente positivi". Entrambi i prigionieri *sanno* che P è vera e che i due interi consecutivi sono strettamente positivi anche prima dell'annuncio del re: Terzo vede un 4 e quindi sa che l'altro numero deve essere almeno 3; Quarta vede un 3 e sa che l'altro numero deve essere almeno 2. Ma c'è di più: ciascun prigioniero *sa che l'altro sa* che P è vera. Ad esempio, poiché Terzo sa che il suo numero deve essere almeno 3, ne deduce che Quarta vede almeno un 3 e quindi sa che Quarta sa che l'altro numero è almeno 2; analogamente, Quarta sa che Terzo sa che l'altro numero è almeno 1. Ciascuno dei prigionieri ha due livelli di conoscenza: sa che P è vera e sa che l'altro sa che P è vera.

Ciò che Quarta ignora prima dell'annuncio del re è il livello di conoscenza superiore, ovvero se Terzo *sa che lei sa che lui sa* che P è vera. L'annuncio del re fornisce questo (quarto) livello di conoscenza, che è necessario per completare il ragionamento esposto sopra e indovinare correttamente i numeri al terzo tocco successivo all'annuncio. In generale, il *puzzle* si risolve in modo analogo quando i numeri sono n ed $n + 1$, ma l'agente che ha sulla fronte il numero $n + 1$ ha bisogno di $n - 1$ tocchi per completare il ragionamento e deve fare uso di $n + 2$ livelli di conoscenza.

L'annuncio del re fornisce ad entrambi i prigionieri l'informazione che "ognuno sa che ognuno sa che . . . ognuno sa che P è vera", corrispondente al livello massimale di conoscenza di P. Indipendentemente da quale sia P, questo è un esempio di ciò che i teorici dei giochi chiamano *conoscenza comune* di un evento o di una proposizione. Non soltanto ognuno sa che P è vera, ma sa anche che tutti lo sanno, e così via. Nel gioco di Pico Legno, la differenza fra restare in prigione e ottenere la grazia dipende da quale livello di conoscenza si possiede. In generale, come discutiamo nella prossima sezione, la soluzione di un gioco può essere fondata su precise ipotesi *epistemiche* che caratterizzano le conoscenze dei giocatori.

Dal punto di vista formale, i modelli epistemici si rifanno alle strutture della logica modale. Queste sono ben note a logici e filosofi della conoscenza, ma spesso riescono poco naturali da manipolare: si pensi al momento di esitazione che ciascuno di noi ha provato la prima volta che ha letto questo verso dall'Inferno (XIII, 25) di Dante: "Cred'io ch'ei credette ch'io credesse. . ." Nel 1976 Aumann ha trovato il modo di esprimere la struttura epistemica sottostante ad un'interazione strategica senza fare esplicito ricorso ai modelli di logica. La rapida diffusione di questo linguaggio più semplice (ma formalmente equivalente) ha reso i teorici dei giochi consapevoli del ruolo delle ipotesi epistemiche. Il lavoro originale di Aumann [21], tradotto per la prima volta in italiano, è pubblicato in questo volume.

L'idea di Aumann è supporre che esista un insieme Ω dei possibili *stati del mondo*. Ogni stato del mondo rappresenta un sistema coerente di ipotesi che includono non solo le informazioni che caratterizzano un gioco (giocatori, strategie, utilità) ma anche tutti gli elementi epistemici rilevanti. Naturalmente, poiché tipicamente gli agenti non hanno una conoscenza completa dell'ambiente in cui agiscono, l'insieme Ω contiene diversi possibili stati di cui soltanto uno è quello vero.

Lo stato epistemico di ogni agente i è rappresentato da una *struttura informativa* che associa ad ogni stato ω in Ω un sottoinsieme non vuoto $P_i(\omega)$ di Ω. Quando lo stato vero è ω, l'agente i ritiene che tutti (e solo) gli stati in $P_i(\omega)$ possano essere veri; in altre parole, l'agente sa soltanto che il vero stato del mondo appartiene all'insieme $P_i(\omega)$. Può essere comodo pensare a $P_i(\omega)$ come all'insieme degli stati che l'agente ritiene possibili quando il vero stato (a lui ignoto) è ω. Aumann [21] assume che la struttura informativa di ogni agente sia una partizione di Ω. In termini formali, questa ipotesi impone alcune (peraltro ragionevoli) restrizioni sull'estensione del sistema delle conoscenze di un agente; si veda [22] per una semplice introduzione. Qui diamo solo le definizioni principali.

Dato un evento $E \subseteq \Omega$ ed uno stato del mondo ω, un agente sa che l'evento E è vero in ω se $P_i(\omega) \subseteq E$. Intuitivamente, se tutto quello che l'agente ritiene possibile nello stato ω è compatibile con E, allora l'agente sa che E è vero. Consideriamo ad esempio il gioco di Pico Legno, con due prigionieri di nome Anna e Berto. Uno stato del mondo $\omega = (k, k+1)$ è una coppia di interi consecutivi, quindi l'insieme $\Omega = \{(0,1), (1,2), \ldots, (k, k+1), \ldots\}$ è costituito da tutte le coppie di interi adiacenti che abbiamo visualizzato in una matrice sul lato sinistro della Figura 3.

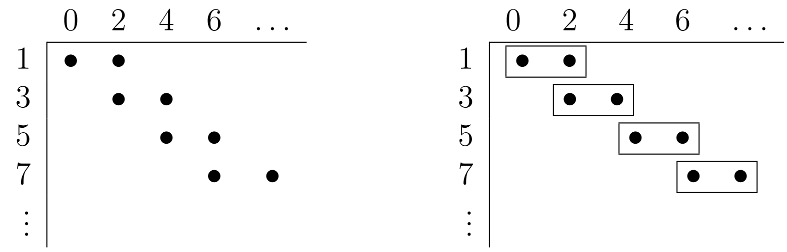

Figura 3: Gli stati del mondo nel gioco di Pico Legno.

Chiamiamo Anna il prigioniero che vede un numero dispari $2m+1$ sulla fronte dell'altro. La sua struttura informativa P_A è la partizione di Ω rappresentata sul lato destro della Figura 3, generata dalle righe della matrice. Quando vede $2m+1$ sulla fronte di Berto, Anna sa soltanto che il vero stato del mondo è uno dei due elementi $\{(2m, 2m+1), (2m+1, 2m+2)\}$. In modo analogo, la partizione informativa di Berto (che vede un numero pari $2m$ sulla fronte di Anna) è generata dalle colonne della matrice. In particolare, si noti che quando Berto vede 0 sa che lo stato del mondo deve essere $(0,1)$; quindi, il primo elemento di P_B è il singoletto $\{(0,1)\}$.

Date le strutture informative P_A e P_B, indichiamo con $P_A \wedge P_B$ il loro *meet*, ovvero la più fine partizione che le contiene entrambe. Un evento E è conoscenza comune fra A e B in ω se $(P_A \wedge P_B)(\omega) \subseteq E$. Nel caso del gioco di Pico Legno, si vede subito che il *meet* delle due partizioni informative è la partizione banale $\{\Omega\}$. Quindi l'unico evento di conoscenza comune all'inizio del gioco è l'informazione banale che lo stato del mondo è in Ω. L'annuncio del re che entrambi i numeri interi sono strettamente positivi raffina il primo elemento della partizione P_A nei due singoletti $(0,1)$ e $(1,2)$ così che $P_A \wedge P_B = \{(0,1),\ \Omega \setminus (0,1)\}$.

Anche se la gente comune non parla di strutture informative o di stati del mondo, questa attrezzatura teorica è indispensabile per trattare in modo rigoroso problemi pratici, come le speculazioni di borsa basate sul possesso di informazioni riservate. Per tenere le cose semplici, continuiamo ad usare gli stati del mondo e le strutture informative del gioco di Pico Legno ma supponiamo che Anna e Berto vogliano fare una scommessa sul vero stato del mondo. Speculare è per certi versi un'attività analoga a scommettere: se la posizione presa in borsa è giusta si guadagna; altrimenti, si perde.

Supponiamo che la distribuzione iniziale di probabilità sugli stati del mondo assegni probabilità $(1/2) \cdot (1/2)^k$ all'evento che il vero stato del mondo è $(k, k+1)$, come rappresentato in Figura 4. (L'esempio si generalizza in modo ovvio quando la distribuzione iniziale è geometrica di parametro p in $(0, 1)$.)

	0	2	4	6	...
1	1/2	1/4			
3		1/8	1/16		
5			1/32	1/64	
7				1/128	1/256
⋮					

Figura 4: La distribuzione di probabilità iniziale.

Per rappresentare l'iniziale simmetria delle informazioni a loro disposizione, supponiamo che questa distribuzione di probabilità sia conoscenza comune per Anna e Berto. Adesso consentiamo a ciascuno di essi di ricevere in via confidenziale informazioni diverse, da cui ciascuno di loro spera di trarre vantaggio sottoscrivendo una scommessa profittevole su quale sia il numero più alto associato allo stato del mondo.

Il rapporto ricevuto da Anna le rivela il valore di uno dei due numeri (quello dispari) che descrivono lo stato del mondo e quindi la sua struttura informativa è descritta dalla stessa partizione P_A che abbiamo rappresentato sul lato destro della Figura 3. Dopo avere appreso che il numero dispari è $2m+1$, Anna sa che lo stato del mondo è $(2m, 2m+1)$ oppure $(2m+1, 2m+2)$. Poiché la probabilità iniziale di questi stati era rispettivamente $(1/2)^{2m+1}$ e $(1/2)^{2m+2}$, dopo avere ricevuto il segnale Anna attribuisce probabilità $2/3$ a $(2m, 2m+1)$, $1/3$ a $(2m+1, 2m+2)$ e 0 a tutti gli altri stati. In altre parole, con probabilità $2/3$ Anna ritiene che il suo segnale sia uguale al valore più alto.

In modo del tutto analogo, Berto riceve un rapporto che gli rivela invece il valore del numero pari. Se il segnale è zero, Berto sa che lo stato del mondo è $(0, 1)$. Se il segnale è un numero pari diverso da zero, dopo avere rivisto la sua distribuzione di probabilità, anche Berto conclude che con probabilità $2/3$ il valore più alto associato allo stato del mondo è uguale al suo segnale.

Poiché il segnale di Anna è un numero dispari e quello di Berto è un numero pari, in tutti gli stati del mondo diversi da $(0, 1)$ i due non dovrebbero avere difficoltà a stipulare una scommessa dove ciascuno punti sul proprio segnale. Ad esempio, se lo stato del mondo fosse $(3, 4)$, Anna sarebbe disposta a scommettere sul 3 e Berto sul 4. Sulla base della propria personale informazione, ciascuno scommette sull'evento più probabile ed ha una speranza di vincita strettamente positiva.

Nel suo lavoro del 1976, Aumann dimostra che, se i due agenti sono razionali, le cose non stanno così. Qualsiasi sia lo stato del mondo, se Anna e Berto hanno la stessa distribuzione iniziale di probabilità e successivamente ricevono informazioni diverse, è impossibile che abbiano conoscenza comune che le loro valutazioni di probabilità sullo stesso evento siano diverse e quindi non si possono trovare su lati diversi della stessa scommessa. Proviamo a spiegarlo in modo intuitivo, giacché la semplice dimostrazione si può leggere nella traduzione dell'originale.

Come abbiamo illustrato sopra, dopo avere ricevuto i loro rapporti Anna e Berto hanno effettivamente valutazioni di probabilità diverse. Questo è possibile perché ciascuno di loro *non sa* che l'altro ha una valutazione diversa. D'altra parte, per riuscire a imbastire una scommessa, occorre che ogni agente razionale la accetti e che *sappia* che l'altro desidera accettarla. L'atto di proporre una scommessa rivela nuova informazione che un agente razionale deve incorporare nelle proprie valutazioni. Quando riflettiamo sui motivi per cui una controparte razionale è disposta ad accettare una scommessa, siamo costretti a ripensare se davvero ci convenga offrirla.

Ad esempio, supponiamo che Anna riceva il segnale 3. Anna ritiene che lo stato del mondo sia $(2, 3)$ con probabilità $2/3$ e $(3, 4)$ con probabilità $1/3$. Quindi pensa di proporre a Berto una scommessa in cui lei punta sul 3. A seconda delle sue informazioni, Berto accetta o rifiuta la scommessa. Se lo stato del mondo è $(2, 3)$ e Berto ha ricevuto il segnale 2, questi non sa se lo stato del mondo sia $(1, 2)$ o $(2, 3)$. Sentendo che Anna desidera scommettere sul 3, Berto deduce che $(1, 2)$ è impossibile; quindi lo stato del mondo deve essere $(2, 3)$ e Berto rifiuta la scommessa. Se invece lo stato del mondo è $(3, 4)$ e Berto ha ricevuto il segnale 4, questi non sa se lo stato del mondo sia $(3, 4)$ o $(4, 5)$. Sentendo che Anna desidera scommettere sul 3, Berto deduce che lo stato del mondo è $(3, 4)$ e accetta la scommessa.

Tirando le somme, se Anna propone di scommettere sul 3, possono succedere due cose. Se Berto rifiuta la scommessa, diventa conoscenza comune che lo stato del mondo è $(2, 3)$; se Berto accetta la scommessa, diventa conoscenza comune che lo stato del mondo è $(3, 4)$. In ogni caso, l'atto di imbastire una scommessa riallinea le opinioni dei due agenti in modo perfetto. Ma c'è di più. Se è Anna a proporre la scommessa, questa è accettata da Berto se e solo se è conoscenza comune che Anna perderà per certo la scommessa. (Lo stesso vale a parti invertite.) L'atto stesso di cercare di imbastire una scommessa fa venir meno la convenienza di proporla.

Un'opportuna generalizzazione di questa osservazione conduce ad un risultato generale di impossibilità (*no trade theorem*) secondo il quale due agenti razionali non possono scambiarsi titoli di borsa a scopo puramente speculativo. L'argomento ha un'immediata presa intuitiva: "Se so che tu sei razionale, perché dovrei comprare un titolo azionario da te? Se sei disposto a venderlo al prezzo p, vuol dire che sai che vale meno di p. E visto che non sei uno sciocco, sarà bene che io mi chieda se sono davvero disposto a pagare p per averlo. Se sto comprando il titolo soltanto perché spero di rivenderlo ad un prezzo più alto, è più prudente non farlo."

6. – Non basta essere razionali

Secondo la teoria dei giochi, un gioco rappresenta un problema di interazione strategica tra agenti razionali. L'ipotesi di razionalità corrisponde ad attribuire ad ogni agente una cosciente motivazione ad agire in modo da massimizzare la propria utilità. Come nel caso del Dilemma del prigioniero, l'interazione fra gli agenti può ostacolare i piani individuali. Tuttavia, la teoria procede sempre sulla base dell'ipotesi che gli agenti siano razionali. La vita quotidiana, d'altra parte, ci costringe a mettere in dubbio la validità di questa ipotesi. Vale dunque la pena chiedersi quanto siano robuste le raccomandazioni della teoria dei giochi.

Per inquadrare la questione, concediamoci un *excursus*. Sappiamo già dalla nostra discussione del Dilemma del prigioniero che un giocatore razionale preferisce giocare una strategia dominante (se esiste), perché questa gli arreca un'utilità superiore di qualsiasi altra strategia dominata. Rovesciando il punto di vista, un giocatore razionale deve evitare di giocare una strategia *dominata* perché questa lo condurrebbe ad un'utilità inferiore. Sfruttando questa osservazione, possiamo giustificare un'importante tecnica di semplificazione dei problemi di interazione strategica.

Consideriamo il gioco rappresentato sulla sinistra della Figura 5, dove Primo sceglie la riga e Seconda la colonna. Supponiamo che i giocatori siano razionali e che questa razionalità sia conoscenza comune.[7] Per ogni scelta di Primo, l'utilità che Seconda ottiene giocando Sinistra è inferiore a quella che riceve scegliendo Centro. Poiché S è dominata da C, Seconda non gioca mai S.

	S	C	D
A	$3,2$	$0,4$	$0,1$
M	$2,0$	$4,1$	$1,2$
B	$1,1$	$1,2$	$2,3$

$\Longrightarrow$

	C	D
A	$0,4$	$0,1$
M	$4,1$	$1,2$
B	$1,2$	$2,3$

$\Longrightarrow$

	C	D
M	$4,1$	$1,2$
B	$1,2$	$2,3$

Figura 5: Eliminazione delle strategie iterativamente dominate.

Adesso sfruttiamo l'ipotesi di conoscenza comune. Giacché Primo sa che Seconda è razionale, può ripetere il ragionamento appena fatto e dedurre che Seconda non gioca mai S. Quindi, dal punto di vista dell'interazione strategica, l'opzione di giocare S è irrilevante: possiamo semplificare il gioco cancellando la colonna S. Ne risulta il gioco rappresentato al centro della Figura 5, dove per Primo la strategia Alto è dominata da Mezzano. Primo è razionale e non gioca mai A. Seconda, che sa che Primo è razionale, deduce che A non sarà giocato. Eliminando la riga A, possiamo ridurre l'interazione strategica al gioco rappresentato sulla destra della Figura 5, dove Centro risulta dominata da Destra per Seconda. Proseguendo in modo analogo, si eliminano prima C e poi M e si conclude che l'unico di giocare coerente con l'ipotesi di conoscenza comune della razionalità degli agenti è (B, D).

Questa tecnica di analisi prende il nome di *eliminazione delle strategie iterativamente dominate*. Anche se in generale il suo uso non garantisce che si possa dedurre un unico modo di giocare, ci sono ambiti in cui questa tecnica si rivela insospettamente potente. Dal nostro punto di vista, è sufficiente l'osservazione che, per "cancellare" una strategia dominata, sono necessarie precise ipotesi epistemiche.

Nell'esempio qui sopra, ad ogni passo dell'iterazione, invochiamo un livello superiore di conoscenza della razionalità degli avversari. Seconda non gioca S perché è razionale e sa che S è dominata. Primo esclude S dall'analisi del gioco perché

[7] Lo sottaciamo per semplicità, ma facciamo anche l'ipotesi che la struttura del gioco sia conoscenza comune.

sa che Seconda è razionale e quindi non gioca strategie dominate. E' sulla base di ciò che, nel secondo stadio del ragionamento, Primo decide di non giocare A perché è una strategia dominata. A sua volta Seconda, sapendo che Primo sa che lei è razionale, può escludere A dalla sua analisi del gioco. E così via... Soltanto l'ipotesi di conoscenza comune della razionalità dei giocatori consente di iterare il ragionamento a qualsiasi livello. In altre parole, per "risolvere" un problema di interazione strategica secondo questa tecnica non basta che i giocatori siano razionali. Devono anche sapere di esserlo (e saperlo *ad infinitum*).

Tuttavia, se occorre un'ipotesi di razionalità così forte per giustificare l'eliminazione delle strategie iterativamente dominate, quanto possiamo fidarci di questa tecnica per affrontare i problemi reali di interazione strategica? In verità, non molto: se la corretta applicazione ad un problema richiede più di tre o quattro stadi di iterazione, moltissimi giocatori in carne ed ossa scelgono strategie che sono iterativamente dominate. Ecco un esempio molto noto.

Ciascuno di n giocatori punta 10 euro e sceglie simultaneamente un numero intero non superiore a 120. Il montepremi raccolto è diviso in parti uguali fra tutti coloro che hanno scelto un numero x che minimizza la distanza da un valore $\bar{x}$ uguale a 2/3 della media dei numeri scelti dai giocatori. (Prima di leggere oltre, concedetevi qualche minuto per chiedervi come giochereste e scrivetelo sul margine del foglio.) Applichiamo l'eliminazione delle strategie iterativamente dominate. Per qualsiasi combinazione di scelte dei giocatori, $\bar{x} \leq (2/3) \cdot 120 = 80$. Quindi puntare su un numero superiore a 80 è una strategia dominata dallo stesso 80 e nessun giocatore razionale punta su un numero superiore a 80. Ma questo implica $\bar{x} \leq (2/3) \cdot 80 = 53{,}33$ e, al secondo stadio del ragionamento, scopriamo che puntare su un numero superiore a 53 è dominato dallo stesso 53. Proseguendo, questo implica $\bar{x} \leq (2/3) \cdot 53{,}33 = 35{,}55$; e così via, fino a concludere che l'unico numero che sopravvive all'eliminazione delle strategie iterativamente dominate è lo zero.

Leggete che cosa avete scritto sul margine: quasi nessuno punta su questo numero. (Anzi, chi lo fa sovente non conquista il montepremi.) E' più probabile che il numero scelto sia compreso fra 23 e 80, che corrispondono a quanto si ottiene entro i primi quattro stadi del ragionamento. La soluzione ottenuta per eliminazione delle strategie iterativamente dominate non regge alla prova dei fatti. Giacché questa tecnica è una conseguenza dell'ipotesi di conoscenza comune della razionalità dei giocatori, possiamo argomentare che questa ipotesi pretende troppo dai giocatori in carne ed ossa. Forse dovremmo espungere l'eliminazione delle strategie iterativamente dominate (oltre il terzo o quarto stadio) dall'arsenale dei metodi di analisi delle interazioni strategiche reali.

Allo scopo di determinare la loro plausibilità, questo rende importante determinare quali siano i fondamenti epistemici dei concetti di soluzione elaborati dalla teoria dei giochi. Oltre ad essere razionali, che cosa devono sapere esattamente i giocatori per convenire su un equilibrio? Questa domanda è stata sollevata per la prima volta da Aumann [23], che nel 1987 ha identificato quali ipotesi epistemiche sostengono la nozione di equilibrio correlato da egli stesso introdotta nel 1974 e discussa nella Sezione 4. Ecco il teorema: *supponiamo che i giocatori condividano la stessa distribuzione iniziale di probabilità sugli stati del mondo e che ogni giocatore sia razionale in tutti gli stati del mondo; allora la distribuzione di probabilità sulle* *scelte congiunte dei giocatori è associata ad un equilibrio correlato.*

Qualche anno dopo, Aumann e Brandenburger [24] hanno affrontato e risolto completamente la stessa questione relativamente alla nozione di equilibrio di Nash. Riportiamo la risposta per il caso più semplice, in cui i giocatori non fanno uso di dispositivi casuali: *supponiamo che i giocatori siano razionali e che le strategie scelte da ogni giocatore siano note a tutti* (senza essere necessariamente conoscenza comune); *allora queste strategie costituiscono un equilibrio di Nash.* Sorprendentemente, non è necessaria alcuna ipotesi di conoscenza comune: è sufficiente che ogni giocatore sia razionale e conosca le strategie scelte dagli altri.

7. – Le liquidazioni fallimentari secondo il Talmud

Chiudiamo questo lavoro raccontando un piccolo contributo matematico [25] che illustra un altro aspetto della ricca personalità di Aumann. Questi è un uomo molto religioso, che non manca mai di indossare la *kippah* e conosce piuttosto bene il Talmud.[8] Nel 1985, insieme a Maschler, Aumann ha pubblicato un'analisi che mediante la teoria dei giochi interpreta in modo mirabile un passaggio notoriamente difficile del Talmud babilonese (Kethubot 93a) e risolve un problema aperto da circa 2000 anni.

Un'azienda dichiara fallimento quando ha debiti $d_1, d_2, \ldots, d_n$ la cui somma supera il valore V del suo patrimonio. Ci chiediamo come si dovrebbe ripartire V fra i creditori. Nella moderna giurisprudenza, la soluzione tradizionale è la *divisione proporzionale* di V in base all'entità del credito d_i detenuto dall'agente i. Un'altra soluzione possibile è la *divisione in parti uguali* di V fra tutti i creditori.

Il Talmud affronta il problema spiegando soltanto come risolvere tre esempi specifici. Ci sono tre creditori ai quali l'azienda deve rispettivamente 100, 200 e 300. A seconda dell'entità del patrimonio disponibile ($V = 100, 200, 300$), il Talmud propone le tre diverse suddivisioni illustrate nella Figura 6.

		Debito		
		100	200	300
	100	33,3	33,3	33,3
Patrimonio	200	50	75	75
	300	50	100	150

Figura 6: Liquidazione di un fallimento secondo il Talmud.

La prima riga corrisponde al caso in cui il valore del patrimonio $V = 100$ non supera neanche il debito più piccolo. In questo caso, l'indicazione è di effettuare una divisione in parti uguali. Nel caso in cui sia $V = 300$, la terza riga raccomanda invece una divisione proporzionale. L'incongruenza fra queste due indicazioni è ulteriormente aggravata dalla seconda riga che, per $V = 200$, descrive una divisione che non è né proporzionale né in parti uguali. Possiamo facilmente immaginare la

[8] Il Talmud è un compendio di scritti rabbinici che costituisce la base per le leggi e le tradizioni ebree.

perplessità degli interpreti del Talmud che per quasi due millenni non sono riusciti a derivare una regola generale coerente con tutti e tre gli esempi. Aumann e Maschler, invece, hanno dimostrato che esiste una regola coerente e che essa può essere facilmente spiegata.

Cominciamo da un caso più semplice, proposto in un altro brano del Talmud (Baba Metzia 2a). Due persone si disputano la proprietà di un tessuto. Anna afferma che è tutto suo; invece Berto sostiene che una metà è sua. Secondo il Talmud, la controversia va risolta assegnando 3/4 del tessuto ad Anna ed 1/4 a Berto. L'idea è la seguente. Poiché Berto riconosce che metà dell'abito non è sua, questa parte va attribuita ad Anna; la metà restante va divisa in parti uguali.

Applichiamo il ragionamento sottostante la regola di Baba Metzia ad un problema di fallimento con due creditori che vantano diritti d_1, d_2 sul valore V del patrimonio. Ciascun creditore i vanta soltanto il diritto d_i, quindi la parte positiva $(V - d_i)^+ = \max\{V - d_i, 0\}$ del valore residuo può essere immediatamente assegnata all'altro. La parte del patrimonio che ancora avanza, $V - (V - d_1)^+ - (V - d_2)^+$, si divide in parti uguali. Il creditore i riceve la parte che l'altro non gli contesta e metà della quota residua, ovvero

$$x_i = \frac{V - (V - d_1)^+ - (V - d_2)^+}{2} + (V - d_{3-i})^+. \tag{2}$$

Supponendo $d_1 \leq d_2$, questa soluzione può essere descritta in funzione di V. Quando V è piccolo, si divide in parti uguali. Quando entrambi i creditori hanno ricevuto $d_1/2$, si assegna ogni ulteriore euro al creditore maggiore fino a quando entrambi hanno un credito residuale di $d_1/2$. Da qui in poi, ogni ulteriore euro è diviso di nuovo in parti uguali.

La regola di Baba Metzia è rappresentata in Figura 7 sotto l'ipotesi che i debiti siano $d_1 = 200$ e $d_2 = 300$ e che il valore del patrimonio vari da 0 a 500. (Sullo stesso grafico, la regola di divisione proporzionale corrisponde al segmento che unisce l'origine al punto $(200, 300)$.) Si noti l'inversione del punto di vista. Nel primo tratto, tra l'origine e $(100, 100)$, si divide in parti uguali il patrimonio ed i giocatori ottengono uguali guadagni. Nel terzo tratto, tra $(100, 200)$ e $(200, 300)$, si divide in parti uguali il debito impagato ed i giocatori soffrono uguali perdite.

Se estendiamo opportunamente la logica dal caso con due creditori al problema generale, possiamo determinare la regola implicita del Talmud. Un problema di liquidazione fallimentare (E, d) è definito da un patrimonio di valore $V \geq 0$ con il quale dobbiamo far fronte a n debiti $0 \leq d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n$ (ordinati in modo crescente) tali che $V \leq \sum_i d_i$. Una soluzione per tale problema è costituita da un vettore $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ di attribuzioni per ciascun creditore, tale che $\sum_i x_i = V$. Diciamo che la soluzione di un problema di liquidazione fallimentare è *coerente* se la somma totale $x_i + x_j$ assegnata a due creditori $i \neq j$ è divisa fra questi esattamente come prescritto dalla regola di Baba Metzia. Intuitivamente, le attribuzioni di una soluzione coerente sono le stesse a cui giungerebbe ciascuna coppia di creditori applicando la regola di Baba Metzia per dividersi la somma $x_i + x_j$ ad essi complessivamente assegnata dalla soluzione stessa.

Il Teorema A di Aumann e Maschler mostra che ogni problema di bancarotta ammette una sola soluzione coerente. In termini più formali, esiste un'unica estensione

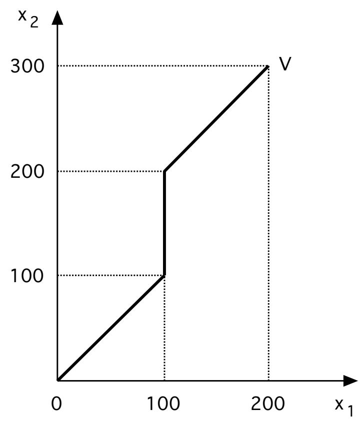

Figura 7: La regola di Baba Metzia per $d_1 = 200$ e $d_2 = 300$.

coerente della regola di Baba Matzia dai problemi di bancarotta con due creditori ai problemi di bancarotta con $n \geq 2$ creditori. Questa soluzione riproduce esattamente le attribuzioni proposte nei tre esempi del Talmud presentati nella Figura 6. Aumann e Maschler dimostrano anche che essa coincide sia con il *nocciolo* sia con il *nucleolo* di un gioco in forma cooperativa naturalmente associato al problema di bancarotta. Qui è sufficiente descrivere come funziona in generale la regola di liquidazione fallimentare raccomandata dal Talmud.

Dati gli n debiti $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n$, illustriamo come applicare la regola all'aumentare di V. Per valori iniziali di V piccoli, il patrimonio è diviso in parti uguali fra tutti i creditori. Non appena il creditore 1 (verso cui vale il minor debito) ha ottenuto $d_1/2$, la sua attribuzione smette di aumentare ed ogni euro addizionale è diviso in parti uguali fra gli altri $n-1$ creditori. Si procede così fino a quando il creditore 2 (verso cui vale il secondo minor debito) ha ottenuto $d_2/2$; a questo punto la sua attribuzione smette di aumentare ed ogni ulteriore euro è diviso in parti uguali fra i restanti $n-2$ creditori. Questa procedura continua in modo analogo fino a quando il credito impagato del creditore n si è ridotto a $d_{n-1}/2$. A questo punto, rientra in gioco il creditore $n-1$ ed ogni euro addizionale è diviso fra questi due fino a quando il credito impagato di ciascuno di loro si è ridotto a $d_{n-2}/2$. Qui rientra il creditore $n-2$, e così via. Il creditore 1 rientra per ultimo, quando tutti hanno un credito impagato di $d_1/2$ e da questo momento in poi ogni ulteriore euro è diviso in parti uguali.

Riferimenti bibliografici

[1] Accademia Reale delle Scienze di Svezia, "Comunicato stampa" del 10 ottobre 2005 per lo *Sveriges Riksbank Prize in Economic Sciences in Memory of Alfred Nobel 2005.*

[2] Accademia Reale delle Scienze di Svezia, "Comunicato stampa" dell'11 ottobre

1994 per lo *Sveriges Riksbank Prize in Economic Sciences in Memory of Alfred Nobel 1994*.

[3] S. Nasar (1998), *A beautiful mind*, New York: Simon and Schuster. Traduzione italiana: *Il genio dei numeri*, Milano: Rizzoli, 1999.

[4] R.J. Aumann (2005), "Autobiography", *The Nobel Prizes 2005*, Stockholm: Karl Grandin. [`http://nobelprize.org`]

[5] J.F. Nash (1994), "Autobiography", *The Nobel Prizes 1994*, Stockholm: Tore Frängsmyr. [`http://nobelprize.org`]

[6] S. Hart (2005), "An interview with Robert Aumann", *Macroeconomic Dynamics* **9**, 683–740.

[7] P. Walker (2005), "A chronology of game theory", webpage, ottobre 2005. [`http://www.econ.canterbury.ac.nz/personal_pages/paul_walker/gt/hist.htm`]

[8] M. LiCalzi (2003), "Un eponimo ricorrente: Nash e la teoria dei giochi", *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, A*–**6**, 3–26.

[9] S. Hart e A. Neyman (1995), a cura di, *Game and economic theory: Selected contributions in honor of Robert J. Aumann*, University of Michigan Press.

[10] S. Hart (2006), "Robert Aumann's game and economic theory", *Scandinavian Journal of Economics* **108**, 185–211.

[11] R.J. Aumann (2006), "War and peace", *Proceedings of the National Academy of Sciences* **103**, 17075–17078. Traduzione italiana: "Guerra e pace", in questo volume. PAGES

[12] R.J. Aumann e M. Maschler (1964), "The bargaining set for cooperative games", in: *Advances in Game Theory*, a cura di M. Dresher, L.S. Shapley e A.W. Tucker, Princeton University Press, 443–476.

[13] M.J. Osborne e A. Rubinstein (1994), *A course in game theory*, The MIT Press.

[14] R.J. Aumann (1989), *Lectures on game theory*, Westview Press.

[15] B. Ingrao e G. Israel (1987), *La mano invisibile: L'equilibrio economico nella storia della scienza*, Laterza.

[16] F.Y. Edgeworth (1881), *Mathematical physics*, Kegan Paul.

[17] R.J. Aumann (1964), "Markets with a continuum of traders", *Econometrica* **32**, 39–50.

[18] R.J. Aumann (1965), "Integrals of set-valued functions", *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **11**, 488–503.

[19] R.J. Aumann (1974), "Subjectivity and correlation in randomized strategies", *Journal of Mathematical Economics* **1**, 67–96.

[20] J.E. Littlewood (1953), *A mathematician's miscellany*, Methuen.

[21] R. Aumannn (1976), "Agreeing to disagree", *Annals of Statistics* **4**, 1236–1239. Traduzione italiana: "Essere d'accordo di non essere d'accordo", in questo volume.

PAGES

[22] O. Board (2002), "Knowledge, beliefs, and game-theoretic solution concepts", *Oxford Review of Economic Policy* **18**, 418–432.

[23] R.J. Aumann (1987), "Correlated equilibrium as an expression of Bayesian rationality", *Econometrica* **55**, 1–18.

[24] R.J. Aumann e A. Brandenburger (1995), "Epistemic conditions for Nash equilibrium", *Econometrica* **63**, 1161–1180.

[25] R.J. Aumann e M. Maschler (1985), "Game-theoretic analysis of a bankruptcy problem from the Talmud", *Journal of Economic Theory* **36**, 195–213.