Giacomo Pasini
giacomo.pasini@unive.it
http://venus.unive.it/pasinigi

Paolo Pin
pin@unive.it
http://venus.unive.it/pin

Venezia, 21 Novembre 2006

Matematica I, Prima Parte, A.A. 2006/2007

- Traccia degli argomenti trattati nelle lezioni -

Indice

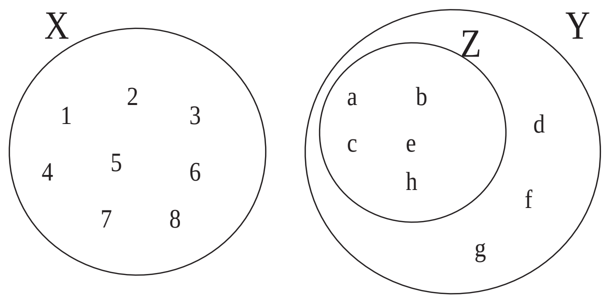
1 Insiemi e operatori logici

1. **Insiemi:**

- Un insieme di elementi può essere definito come
  - una lista (esempi: $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}, Y = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$)
  - oppure una legge che caratterizza gli elementi (esempi: $X = \{$ numeri naturali maggiori di 0 e minori di 9$\}$, $Z = \{$ le lettere della parola *'bacheca'*$\}$,). Notazione $Z = \{x|x$ è una lettera della parola *'bacheca'*$\}$. Si legge

$\{x$	tutti gli elementi x
$\vert$	tali per cui ...

  Useremo gli insiemi X, Y e Z negli esempi di tutto il capitolo. L'insieme vuoto $\emptyset$. Simbolo $\in$ di appartenenza.
- Cardinalità di un insieme. Se un insieme è infinito è impossibile definirlo con una lista. Esempio: Pippo$= \{x|x$ è un numero pari$\}$. Un insieme che contiene un numero infinito di elementi si chiama insieme infinito. Viceversa, un insieme che contiene un numero finito di elementi è un insieme finito. Pippo è un insieme infinito. Attenzione: Pluto$= \{x \in X|x$ è un numero pari$\}$ è un insieme finito.
- Una rappresentazione grafica intuitiva, che può essere equivalente a entrambe, è quella dei diagrammi di Venn.



- Sottoinsiemi: un insieme A è sottoinsieme di un insieme B se tutti gli elementi di A sono anche elementi di B
  - ($\subset$ e $\subseteq$) Sottoinsieme proprio $Z \subset Y$. Tutti gli elementi di Z sono elementi di Y ma non viceversa, i.e. esiste almeno

un elemento di Y che non è contenuto in Z. Sottoinsieme improprio, $Z \subseteq Z$ (esempi: $Z \subset Y$, $1 \in X$ ma $1 \not\subset X$, $\{1, 2\} \subset X$ ma $\{1, 2\} \notin X$).

  – $\emptyset$ è sottoinsieme di qualunque insieme.
  – Spesso un sottoinsieme è sottointeso (esempio: $\{x \mid x < 3\}$, e Pippo sono sottoinsiemi dei numeri, ma quali?). Pluto è un sottoinsieme. La scrittura $\{x \in X \mid x \text{ ha una certa proprietà}\}$ si usa proprio per indicare un sottoinsieme di X.

- Unione, intersezione e differenza di due insiemi
  – l'unione di due insiemi è il nuovo insieme che raggruppa gli elementi degli insiemi di partenza:
    $X \cup Y = \{x | x \in X \text{ oppure } x \in Y\}$ ha 16 elementi. In generale, l'insieme Unione ha un numero di elementi compreso fra il numero di elementi dell'insieme più numeroso e la somma del numero di elementi di ciascun insieme di partenza.
  – l'intersezione di due insiemi è il nuovo insieme degli elementi comuni agli insiemi di partenza:
    $Y \cap Z = \{x | x \in Y \text{ ed } x \in Z\} = \{a, b, c, e, h\}$
  – Se $A \subseteq B$, l'insieme differenza è il nuovo insieme degli elementi di B ma NON di A:
    $Y \backslash Z = \{x | x \in Y \text{ ed } x \notin Z\} = \{d, f, g\}$

  Unione, Intersezione e Differenza si applicano anche a più di due insiemi: $A \cup B \cup C$ o $(A \cap B) \cup C$. Vedi esercizi.

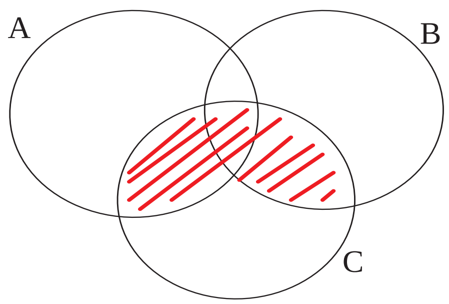
- Insiemi disgiunti: due insiemi si dicono disgiunti se non hanno elementi in comune. Tale relazione può essere espressa utilizzando l'Intersezione. Formalmente:
  X ed Y sono disgiunti perchè $X \cap Y = \emptyset$

- Prodotto cartesiano di due insiemi. Il prodotto cartesiano fra due insiemi A e B è il nuovo insieme $A \times B$ che ha per elementi tutte le possibili coppie (a, b) con primo elemento un elemento di A e per secondo elemento un elemento di B. Formalmente:
  $A \times B = \{(a, b) | a \in A \text{ ed } b \in B\}$
  Quanti elementi ha un prodotto cartesiano? Il simbolo che si utilizza non è casuale (ricordate le elementari): ha un numero di elementi pari al prodotto del numero di elementi di ciascun insieme.
  Ad esempio: $X \times Y$ ha 64 elementi, le caselle di una scacchiera
  Come Intersezione ed Unione, il prodotto cartesiano si può esten-

dere naturalmente a più di due insiemi, considerando le triple, quadruple, ecc.

- **Esercizi:**

  (a) Dati tre insiemi A, B e C, l' uguaglianza:
  $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ è sempre verificata? *Chiamiamo*

  $Q1 = (A \cup B) \cap C$, $Q2 = A \cap C$ e $Q3 = B \cap C$
  (dimostriamo prima che se un elemento soddisfa l'espressione sinistra, allora soddisfa anche la destra):
  $x \in Q1 \Rightarrow x \in C$ ed ($x \in A$ oppure $x \in B$)
  $\Rightarrow x \in Q2$ oppure $x \in Q3 \Rightarrow x \in Q2 \cup Q3$;
  (adesso prendiamo un elemento che soddisfa l'espressione destra, e verifichiamo la sinistra):
  $x \in Q2 \Rightarrow x \in A$ ed $x \in C$
  $\Rightarrow x \in (A \cup B)$ ed $x \in C$
  $\Rightarrow x \in Q1$
  lo stesso partendo da $x \in Q3$.

  (b) L'insieme $A \times B$ è formato da 7 elementi. Quanti possono essere gli elementi di A e di B?
  7 è un numero primo, cioè può essere riscritto solo come 7×1 o 1×7.

2. **Implicazioni logiche.**

- Le implicazioni $\Longrightarrow$, $\Longleftarrow$ e $\Longleftrightarrow$
  Nel linguaggio, l'implicazione è espressa nella forma *se* A *allora* B.
  L'unico caso in cui tale affermazione risulta FALSA è quindi il caso in cui A è VERO e B è FALSO.
  Esempio:

$$A \Longrightarrow B$$

se piove *allora* ci sono nuvole in cielo

A	B	A $\Longrightarrow$ B
V	V	V
piove	ci sono nuvole	
F	V	V
non piove	ci sono nuvole	
F	F	V
non piove	non ci sono nuvole	
V	F	F
piove	non ci sono nuvole	

- Vi è un'analogia fra l'implicazione logica e la definizione di sottoinsieme:
  se $x \in A$, allora $x \in B$. $x \in A \Rightarrow x \in B$ è equivalente a $A \subset B$.
  Pensate ad $A = \{$ giorni di pioggia $\}$; $B = \{$ giorni nuvolosi $\}$

A	B	A $\Longrightarrow$ B
V	V	V
$x \in A$	$x \in B$	$A \subseteq B$
F	V	V
$x \notin A$	$x \in B$	$A \subseteq B$
F	F	V
$x \notin A$	$x \notin B$	$A \subseteq B$
V	F	F
$x \in A$	$x \notin B$	$A \nsubseteq B$

  l'unica condizione falsa è quella di un giorno che sia di pioggia ma non nuvoloso.
  Per verificare che due proprietà sono equivalenti si può provare che le condizioni che determinano l'una implicano l'altra, e viceversa.
  In formule: $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$ implicano $A = B$, così come $A \Longrightarrow B$ e $B \Longrightarrow A$ implicano $A \Leftrightarrow B$.
  Esempi sulle implicazioni logiche: x è divisibile per 4 $\Longrightarrow$ x è pari, $x \in Z \Rightarrow x \in Y$, ma $x \in Y \not\Rightarrow x \in Z$).

- Condizioni necessarie e sufficienti.
  Supponete $A \Longrightarrow B$ sia vera. Allora

  - A è condizione *sufficiente* per B: poichè se A allora B è vera, se A è vera, allora B deve essere vera, ma se A è falsa, B può essere sia vera che falsa.
    In altre parole: è sufficiente che A sia vera perchè B sia vera,

ma ci possono essere casi in cui B è vera nonostante A sia falsa.

– B è condizione *necessaria* per A: poichè se A allora B è vera, se B è falsa, allora A è falsa. Se B è vera, allora A può essere sia vera che falsa.
In altre parole: affinchè A sia vera, è necessario che B sia vera. A non può essere vera se B non è vera.

- **Esercizi svolti:**

(a) *Due rettangoli sono uguali se hanno base e altezza uguali.* Individuare alcune condizioni necessarie e alcune sufficienti perché due rettangoli siano uguali.
Chiamiamo rispettivamente R1 ed R2 i due rettangoli. Dalla frase precedente, possiamo dire che:

i. *base R1= base R2* e *altezza R1= altezza R2* $\Longrightarrow$ *R1=R2*

ii. *R1=R2* $\Longrightarrow$ *base R1= base R2*

iii. *R1=R2* $\Longrightarrow$ *altezza R1= altezza R2*

Condizioni sufficienti per R1=R2: da i. , base R1= base R2 e *altezza R1= altezza R2 è condizione sufficiente per R1=R2. Notare che base R1= base R2 NON è condizione sufficiente. Condizioni necessarie per R1=R2: da ii., base R1= base R2 è condizione necessaria per R1=R2. Da iii., altezza R1=altezza R2 è una seconda condizione necessaria.*

(b) Dalla proposizione: Il professore non ha detto che non avrebbe interrogato si può trarre una sola delle seguenti deduzioni. Quale?

i. Il professore interrogherà certamente

ii. Forse il professore interrogherà

iii. E' sicuro che il professore interrogherà

iv. Il professore non ha intenzione di interrogare

Possiamo scrivere l'implicazione se il professore dice che interrogherà, allora interrogherà. O, formalmente: Il professore dice che interrogherà $\Longrightarrow$ *il professore interrogherà. La proposizione è quindi uguale a dire che in A* $\Longrightarrow$ *B, A è falso. Se l'implicazione è vera, allora:*
A è condizione sufficiente *per B. Quindi, se A è falso la condizione sufficiente perchè B sia vero non è soddisfatta: B potrebbe essere sia vera che falsa, cioè il professore potrebbe interrogare ma anche non interrogare. Possiamo dedurre solamente ii.*

3. **Funzioni:**

- Una funzione è una legge che associa ad ogni elemento di un insieme, un elemento di un altro insieme. Tabella dei valori.
  Esempio, prendiamo una funzione da $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $Y = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, così definita

all'elemento	è assegnato l'elemento
x	y
1	a
2	g
3	g
4	g
5	b
6	c
7	a
8	c

  Esempi:
  - i grafici dei giornali:
    il rendimento di un titolo associa ad ogni istante nel tempo (giorno) un rendimento percentuale, associa ad ogni elemento dell'insieme dei giorni un elemento dell'insieme dei valori percentuali;
  - il numero di lettere di una parola:
    è una funzione dall'insieme delle parole all'insieme dei numeri (naturali), l'AZIONE della funzione è assegnare un numero a ciascuna parola;
  - $f(x) = 2 \cdot x$:
    è una funzione dall'insieme dei numeri allo stesso insieme dei numeri naturali; una funzione può essere definita da un insieme a se stesso, ad ogni numero fa corrispondere il suo doppio.
- Notazione con freccia ($f : x \to 2x$).
- Variabile dipendente e variabile indipendente.
  L'Output di una funzione DIPENDE dall'input: a ciascun elemento dell'insieme di partenza, viene assegnato, secondo un'azione ben definita, un elemento dell'insieme di arrivo. L'input prende il nome di variabile INDIPENDENTE, l'Output di variabile DIPENDENTE.
- funzione reale di variabile reale.
  Nei prossimi capitoli si approfondirà il concetto di funzione, re-

stringendolo a quanto è di interesse per l'economia: si parlerà solamente di funzioni reali di variabili reali, cioè di funzioni $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Ricordate però che il concetto è più ampio e si può riferire a due insiemi generici. Per chi vuole, on–line appunti con appendice.

- grafico di una funzione. Supponete che A e B siano due sottoinsiemi di $\mathbb{R}$: rappresentare il prodotto cartesiano $A \times B$. Sia $f : A \to B$, il grafico non è altro che la rappresentazione sul prodotto cartesiano di tutti i punti $(x, f(x))$, dove $x \in A$.
  Esempi:
  La scacchiera, poi una funzione qualsiasi ($y = x^2$)
  FARE GRAFICO

- Zeri di una funzione.
  Siano A un insieme e B un sottoinsieme di $\mathbb{R}$. $f : A \to B$ è una funzione. Uno zero della funzione f è un $x \in A$, per il quale $f(x) = 0$.
  Gli zeri si trovano facilmente guardando il grafico: Ad ogni coppia $(x, f(x))$ corrisponde un punto sul piano cartesiano. Se x è uno zero della funzione, allora la coppia sarà del tipo $(x, 0)$. L'ordinata y del punto sarà 0, e ciò significa che il punto si trova sull'asse delle x. Quindi gli zeri della funzione sono esattamente le ascisse delle intersezioni del grafico con l'asse delle x.

  Esempi:
  $f(x) = x - 5$ lo zero è $x = 5 \in A$
  $f(x) = x^2$ lo zero è $x = 0$.

- Funzione identità.
  Si chiama funzione identità su un insieme A una funzione cha associa ad ogni elemento l'elemento stesso.

  La funzione identità, è tale per cui per ogni $x \in X$ si ha $f(x) = x$

4. **Quantificatori.**

- *Per ogni* ($\forall$) ed *esiste* ($\exists$) i quantificatori sono espressioni come qualcosa (quantificatore esistenziale) e ogni cosa (quantificatore universale) e le loro controparti simboliche *Per ogni* ($\forall$) ed *esiste* ($\exists$). Il nome quantificatori è legato al fatto che indicano quanto è grande l'estensione in cui è valido un predicato.

- Negazione dei quantificatori: (i) $non\forall \iff \exists non$; (ii) $non\exists \iff \forall non$

I quantificatori universale ed esistenziale opportunamente combinati con il connettivo logico di negazione possono svolgere l'uno la funzione dell'altro. L'affermazione è falso che ogni numero è pari si può anche esprimere dicendo che esiste un numero che non è pari. Nel linguaggio formale questo si può tradurre dicendo che

$$non(\forall x \in P)$$

è equivalente a

$$\exists x\ non \in P$$

e questo vale per qualunque scelta di P.

Analogamente l'affermazione non esiste un numero naturale divisibile per 0 è equivalente all'affermazione ogni numero naturale non è divisibile per 0, formalmente possiamo dire che

$$non(\exists x \in \mathbb{N})$$

è equivalente a

$$\forall x non \in \mathbb{N}$$

- (Dimostrazione per assurdo).
  Le proposizioni $A \Rightarrow B$ equivale a $nonB \Rightarrow nonA$. Fate la tabella di verità per rendervene conto.
  Esempio: $A = \{$ giorni di pioggia $\}$, $B = \{$ giorni nuvolosi $\}$
  se piove $\Rightarrow$ ci sono nuvole
  equivale a se non ci sono nuvole $\Rightarrow$ non piove

- **Esercizi svolti:**
  (a) Riscrivere, utilizzando gli aggettivi *cattivo* e *disattento*, la frase: *"non è vero che Pierino è buono e attento"*.
  non (Pierino è buono e attento)
  Pierino non è buono o non è attento
  Pierino è cattivo o è disattento

  (b) Quale delle seguenti espressioni significa: non è vero che ogni numero intero è multiplo di 7 (a e b sono numeri interi)?
  a) $\exists a\ \exists b :\ a \neq 7b$;
  b) $\exists a\ \forall b :\ a \neq 7b$;
  c) $\forall a\ \exists b :\ a \neq 7b$;
  d) $\forall a\ \forall b :\ a \neq 7b$?

Riscrivo la proposizione:
$non \forall a\ \exists b : a = 7b$
$\exists a : non \exists b : \ a = 7b$
$\exists a : \forall b\ non\ a = 7b$
$\exists a : \forall b : a \neq 7b$
quindi, la risposta è b).

- **Definizione, assioma, teorema**

  Gli ASSIOMI sono enunciati da cui partire e da usare nelle deduzioni (in matematica per giungere a dimostrare teoremi). Sono proposizioni che non si dimostrano perchè sembrano intuitivamente vere e si usano come punto di partenza. Ad esempio, tutte le costitutzioni partono da assiomi:
  art 1 della costitutzione italiana L'Italia è una repubblica fondata sul lavoro
  art 1 Dichiarazione Universale dei Diritti dell'Uomo Tutti gli esseri umani nascono liberi ed eguali in dignità e diritti. Essi sono dotati di ragione di coscienza e devono agire gli uni verso gli altri in spirito di fratellanza.
  La DEFINIZIONE è un'operazione logica consistente nell'individuazione e nell'illustrazione delle proprietà essenziali di una data cosa, o in una equivalenza tra un termine e il significato del termine stesso.
  In MATEMATICA, gli assiomi possono sono formule che sono soddisfatte da ogni modello per ogni funzione di assegnazione alle variabili. Esempio: assioma di uguaglianza:

$$\forall x, x = x$$

  In alternativa, nell'ambito di una specifica teoria sono le formule che svolgono il ruolo delle assunzioni specifiche della teoria stessa. Esempio, il primo postulato di Euclide nell'ambito della geometria Euclidea:

  > Tra due punti è possibile disegnare una ed una sola retta

  Da notare che esistono geometrie alternative che partono da assiomi differenti (ad esempio, non considerano quello delle parallele).

  In matematica per TEOREMA, strettamente, si intende un enunciato che viene dimostrato nell'ambito di una teoria formale e che in una esposizione sistematica della teoria viene presentato come risultato di rilievo. Solo il ruolo di rilievo differenzia i teoremi dai lemmi (che precedono un teorema più importante), dai corollari (che lo seguono) e dalle semplici proposizioni della teoria.

Appendice: per saperne di più sulle funzioni

- Dominio e codominio. Notazione con insiemi ($f : A \to B$).
  In una funzione dall'insieme A all'insieme B, A è detto dominio e B codominio. ATTENZIONE: una funzione assegna un elemento del codominio ad OGNI elemento del dominio, ma non viceversa. Vedi esempio tabella, o parole $\to$ numero lettere.

- Immagine di una funzione.
  L'insieme di tutti gli elementi di B che vengono assunti come valore dalla funzione, cioè che sono valore della funzione per almeno un x $\in$ A, si chiama immagine della funzione f e si indica con $f(A)$. Ciò sta a indicare: $\{f(x)|x \in A\}$. L'immagine coincide con il codominio B oppure ne è un sottoinsieme. Esempi:
  $f(x) = 2x$ Il dominio è $\mathbb{N}$, il codominio $\mathbb{N}$, l'immagine l'insieme dei numeri pari.
  La funzione numero di lettere di una parola: il dominio è l'insieme delle parole italiane, il codominio è $\mathbb{N}$. La parola più lunga della lingua italiana è *precipitevolissimevolmente**. Quindi, l'immagine è l'insieme dei numeri minori o uguali di 27.

- Funzioni iniettive, suriettive e biiettive.
  Una funzione si dice iniettiva se elementi distinti del dominio hanno un'immagine distinta, o equivalentemente se ogni elemento del codominio corrisponde ad al più un elemento del dominio.
  Se abbiamo una funzione reale di una variabile reale che è iniettiva allora tracciando sul suo piano cartesiano una qualsiasi retta parallela all'asse x (corrispondente al dominio) questa intersecherà il grafico della funzione al più una volta.
  Esempi: $f(x) = x + 3$ è iniettiva. La funzione identità è iniettiva. Se il dominio non è ristretto ai numeri positivi, $f(x) = x^2$ non è iniettiva. $f(x) = sen(x)$ non è iniettiva.
  Una funzione si dice suriettiva quando l'immagine coincide con il codominio, ovvero quando ogni elemento y del codominio è immagine di almeno un punto del dominio.

*Fonte: `www.wikipedia.org` .

Una corrispondenza biunivoca (chiamata anche funzione biiettiva) tra due insiemi A e B è una relazione binaria tra A e B, tale che ad ogni elemento di A corrisponda uno ed un solo elemento di B, e ad ogni elemento di B corrisponda uno ed un solo elemento di A. Una funzione biiettiva è sia iniettiva che suriettiva.

- Funzione composta $f \circ g$.
  Data una funzione f tra due insiemi X e Y ed un'altra funzione g che trasforma ogni elemento di Y in un elemento di un altro insieme Z, si definisce la composizione di f e g come la funzione che trasforma ogni elemento di X in uno di Z usando prima f e poi g.

  Formalmente, date due funzioni $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ definiamo la funzione composta
  $$g \circ f : X \to Z$$
  ponendo
  $$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$
  cioè applicando prima f ad x e quindi applicando g al risultato $f(x)$.
  Esempi: supponiamo che l'altezza di un aereo al tempo t sia data da una funzione h(t) e che la concentrazione di ossigeno nell'atmosfera all'altezza x sia data da un'altra funzione c(x).
  Allora (c o h)(t) = c(h(t)) descrive la concentrazione di ossigeno intorno all'aereo al tempo t.

- Funzione inversa.
  Una funzione biiettiva è anche detta invertibile: possiamo infatti invertire l'azione della funzione e definire la cosiddetta funzione inversa $f^{-1} : B \to A$.
  Esempi: l'unica funzione uguale alla sua inversa è la funzione identità,
  $f(x) = 2 \cdot x \Longrightarrow f(x)^{-1} = \frac{x}{2}$

- Solo le funzioni suriettive hanno una funzione inversa, spesso però questo è omesso e bisogna identificare il dominio dell'inversa.

- **Esercizio svolto:**

  1. Dimostrare che $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.
     f, g sono invertibili, quindi son corrispondenze biunivoche.
     Sia $f : A \to B$, $g : B \to C$. Quindi, $f \circ g : A \to C$ è biunivoca (ad ogni elemento di A corrisponde uno ed un solo elemento di C e viceversa).
     $(f \circ g)^{-1} : C \to A$

$g^{-1} : C \to B$, $f^{-1} : B \to A$ quindi $g^{-1} \circ f^{-1} : C \to A$. Poichè l'inversa di una funzione è biunivoca, abbiamo svolto la dimostrazione.

2 I numeri

1. **Operazioni e insiemi numerici.**

   - L'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali.
     I numeri naturali sono quelli che si usano per contare: 0,1,2,3,4,... cioè i numeri senza virgola, positivi: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$ Formalmente,

     $$\mathbb{N} = \{n | 0 \in \mathbb{N} \ e \ \forall n \in \mathbb{N}, n+1 \in \mathbb{N}\}$$

     Attenzione: i numeri naturali contengono lo zero. Si definisce $\mathbb{N}^+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. In alcuni testi si considera lo zero come escluso nei naturali e si definisce $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.
   - Le operazioni aritmetiche:
     somma $+$, differenza $-$, moltiplicazione $\cdot$ e divisione $/$.
     $\mathbb{N}$ è un insieme chiuso rispetto alla somma ed alla moltiplicazione. Cioè,

     $$\forall n, m \in \mathbb{N}, n+m \in \mathbb{N}$$

     $$\forall n, m \in \mathbb{N}, n \cdot m \in \mathbb{N}$$

   - Elemento neutro (0) della somma, sua unicità. Elemento neutro (1) del prodotto, sua unicità
     0 è l'elemento neutro della somma e della differenza (ma per quest'ultima solo a destra, visto che, come vedremo, non vale la proprietà commutativa), cioè

     $$\forall n \in \mathbb{N}, n+0 = n \ e \ n-0 = n$$

     mentre 1 è l'elemento neutro della moltiplicazione e della divisione (ma per quest'ultima solo a destra), cioè

     $$\forall n \in \mathbb{N}, n \cdot 1 = n \ e \ n/1 = n$$

     In altre parole, le funzioni $f(n) = n+0$, $f(n) = n-0$, $f(n) = n \cdot 1$ e $f(n) = n/1$ sono funzioni identità in qualsiasi insieme numerico.

   - Unicità della scomposizione in fattori primi
     Un numero primo è un numero natuale che è divisibile solo per 1 e per se stesso. Formalmente, l'insieme dei numeri primi è

     $$P = \{p \in \mathbb{N} | \forall q \in N \setminus \{1, p\}, \ p/q \notin \mathbb{N}\}$$

Per ogni numero naturale n, esiste un solo insieme di numeri primi $\{p_1, p_2, p_3, \ldots\}$ tale per cui

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots$$

notare che p_i e p_j non sono necessariamente distinti. Esempio, $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$

(a) $\mathbb{N}$ è chiuso rispetto alla sottrazione? $\mathbb{N}$ è chiuso rispetto all'operazione $\forall n, m \in \mathbb{N} | n \geq m, s = n - m$?

(b) $\mathbb{N}$ è chiuso rispetto alla divisione? L'insieme dei numeri pari è chiuso rispetto alla divisione per 1 e per 2? E l'insieme dei multipli di 10 è chiuso rispetto alla divisione per 2?

- Non sempre la sottrazione è definita in $\mathbb{N}$: l'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi.
  cerchiamo un sovrainsieme di $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z} \supset \mathbb{N}$, chiuso ripetto alla differenza. Basta aggiungere ad $\mathbb{N}$ gli interi negativi:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

- Elemento opposto di un numero $(-x)$, sua unicità
  L'opposto di un numero intero x è un numero intero $-x$ tale che la somma $x + (-x)$ è pari a 0. L'elemento opposto di un numero è unico.
- Non sempre la divisione è definita in $\mathbb{Z}$: l'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali. cerchiamo un sovrainsieme di $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q} \supset \mathbb{Z} \supset \mathbb{N}$, chiuso ripetto al rapporto. Prendiamo l'insieme dei numeri esprimibili come il quoziente di numeri interi:

$$\mathbb{Z} = \{x = p/q | p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$$

  ATTENZIONE: notare come, per sua stessa definizione, non è ammissibile la divisione di nessun numero per 0.
  (Esercizio: è poissibile scrivere 3/4 sotto forma di frazione con denominatore uguale a 5? E con denominatore uguale a 8? Motivare la risposta. Per rispondere si può usare l'elemento neutro del prodotto, che è $1 = \frac{5}{5} = \frac{8}{8} \ldots$)
- Proprietà associativa e commutativa di somma e prodotto.
  Un'operazione $\heartsuit$ gode della proprietà communtativa in un insieme $\mathbb{S}$ se

$$\forall x, y \in S, x \heartsuit y = y \heartsuit x$$

Somma e moltiplicazione godono della proprietà commutativa, sottrazione e divisione no.
Esempi:

(a) $\forall a, b, c \in \mathbb{N}, a + (b + c) = (a + b) + c$ la proprietà associativa della somma vale anche in $\mathbb{Z}$ ed in $\mathbb{Q}$

(b) $\forall a, b, c \in \mathbb{N}, a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ la proprietà associativa della somma vale anche in $\mathbb{Z}$ ed in $\mathbb{Q}$.

(c) La proprietà associativa vale per sottrazione e differenza? Fornire un controesempio*:
$(10 - 3) - 2 \neq 10 - (3 - 2)$.
Attenzione a non confondere quest'esempio con la somma fra interi: $[10 + (-3)] + (-2) = 10 + [(-3) + (-2)]$.

(d) La composizione di funzioni è commutativa? $(f(x) = x + 3; g(x) = 2x \Longrightarrow f(g(x)) \neq g(f(x))$

- Proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma. Il prodotto gode della proprietà distributiva rispetto alla somma:

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$$

Notare che per la proprietà commutativa (e SOLO perchè il prodotto gode della proprietà commutativa) l'equazione precedente è equivalente a

$$(b + c) \cdot a = (b \cdot a) + (c \cdot a)$$

- Elemento inverso di un numero $(\frac{1}{x})$, sua unicità.
  Per ogni elemento x in $\mathbb{Q}$, si definisce l'inverso come l'elemento $y = \frac{1}{x}$ tale per cui il prodotto fra x ed y è pari ad 1.

- Elevamento a potenza. La potenza è il prodotto della base tante volte quant'è l'esponente. Elevo a alla potenza n-esima: $a^n = a \cdot a \cdot ...a$, n volte. Un numero, diverso da 0, elevato alla 0 è uguale a 1. Notare che 0^0 non è definito. Il prodotto di due potenze con la stessa base è una potenza che ha per base la stessa base e per esponente la somma degli esponenti: $a^n a^m = a^{n+m}$. Nello stesso modo, il quoziente di due potenze con la stessa base è una potenza che ha per base la stessa base e per esponente la differenza degli esponenti: $a^n / a^m = a^{n-m}$.

*Se si vuole dimostrare che una proprietà è vera, questa va dimostrata in generale per tutti i casi possibili. Se invece si vuole dimostrare che una proprietà è falsa basterà verificare che è falsa per un solo singolo caso. In matematica non esistono eccezioni che confermano le regole, bensì le invalidano. Si rivedano le analogie con le implicazioni logiche.

Esempi:
$5^0 = 1, 5^1 = 5, 5^2 = 25, 5^3 = 125$
$2^3 2^2 = 2^{3+2} = 2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$
$2^3/2^2 = 2^{3-2} = 2^1 = 2$

- Elevamento a esponente negativo. Un numero a elevato a una potenza negativa $-n$, è uguale a $1/a^n$. Ricordando la regola appena enunciata sul rapporto tra esponenziali con la stessa base, pensiamo a cosa succede a $a^n/a^m = a^{n-m}$ se $n < m$. Il risultato del rapporto è a elevato a potenza negativa, ed in effetti, se scriviamo la potenza come moltiplicazione, è chiaro che $a^{-n} = 1/a^n$.
  Esempio:
  $2^3/2^5 = 2^{3-5} = 2^{-2} = 1/4.$,
  infatti $2^3/2^5 = (2 \cdot 2 \cdot 2)/(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = 1/(2 \cdot 2) = 1/2^2$.

- Radice ennesima: Dato un numero a positivo si chiama radice n-esima di a quel numero positivo b tale che $b^n = a$, tale numero si indica con $\sqrt[n]{a}$. Da questa definizione si ha subito che $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$. Quindi è ragionevole (in virtù delle proprietà delle potenze) porre $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$. La radice ennesima è definita solo per i numeri positivi.
  Esempi:
  $\sqrt[4]{16} = 16^{1/4} = 2$
  $\sqrt[3]{27} = 27^{1/3} = 3$
  $\sqrt[4]{-16} = -16^{1/4}$, non esiste, infatti non esiste un numero che moltiplicato per sè stesso 4 volte restituisce il valore -16.

- Non sempre la radice è definita in $\mathbb{Q}$ (si veda più avanti la dimostrazione del fatto che $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$): l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali. L'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ comprende i numeri razionali e i numeri irrazionali, cioè quelli la cui rappresentazione decimale non termina né è periodica (ad esempio π o $\sqrt{(2)}$), sono quindi quelli che non possono essere scritti come quoziente di due numeri interi. In $\mathbb{R}$, se $a > 0$, la potenza a^x può essere definita per esponenti reali arbitrari x.

- Rappresentazione decimale: I numeri razionali possono essere rappresentati in forma decimale
  Esempi:
  $1.2 = 1 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^{-1} = 12/10$
  $0.041 = 0 \cdot 10^0 + 0 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^{-2} + 1 \cdot 10^{-3} = 41/1000$.
  Ogni frazione $p/10^n$ ammette una rappresentazione decimale limitata

Esempi:
$\frac{73}{100} = 0.73$, $\frac{21}{1000} = 0.021$, $\frac{272}{10} = 27.2$, $\pi = 3.1415\ldots$.

- Dimostrazione del fatto che $\sqrt{2}$ non è razionale.
Supponiamo che $\sqrt(2) \in \mathbb{Q}$. *allora,* $\sqrt(2) = \frac{p}{q}$ *con* p *e* q *primi fra loro. Si può riscrivere*
$$2q^2 = p^2$$
e si possono verificare due casi:
  - *p è dispari.*
  Allora,
  $$2q^2 = (numero\ dispari)^2$$
  Ma un numero dispari al quadrato è sempre dispari. L'uguaglianza è fra un intero pari (a sinistra) e uno dispari (a destra): assurdo!
  - *p è pari, ma allora q è dispari (sono primi fra loro).*
  Possiamo scrivere $p = 2 \cdot s$, *dove* s *è un intero. Per cui*
  $$2(numero\ dispari)^2 = p^2 = 4s^2$$
  ma dividendo a destra e a sinistra per 2 abbiamo
  $$(numero\ dispari)^2 = 2s^2$$
  Siamo tornati, a parti invertite, nello stesso assurdo di prima!

- **Esercizio svolto:**
  - Determinare quanti elementi contiene l' insieme
  $\{n|n$ è un numero naturale divisibile per 3 e $1 < n < 100\}$,
  e l'insieme
  $\{n|n$ è un numero naturale divisibile per 3 e $201 < n < 300\}$?
  Questo esempio serve a dimostrare come le approssimazioni vadano trattate con cautela. Entrambi gli insiemi hanno 100 *elementi e chiaramente un numero ogni* 3 *è divisibile per* 3. *Se si divide* 100 *per* 3 *si ottiene* $\frac{100}{3}$, *approssimabile per difetto a* 33 *e per eccesso a* 34, *qual è il valore giusto? Dipende dai casi: nel primo caso* 33, *nel secondo* 34.

- **Esercizi:**
  (a) Dimostrare che $-1 \cdot x$ è l'opposto di x.
  (b) Dimostrare che l'opposto dell'opposto di un numero è il numero stesso; lo stesso vale per l'inverso.

(c) Dati gli insiemi $X = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 5\}$, $Y = \{x \in \mathbb{R} | x \leq -1\}$ e $Z = \{x \in \mathbb{R} | -3 < x < 0\}$, determinare:
$X \cup Y \cup Z \quad , \quad X \cap Y \cap Z \quad \text{e} \quad X \backslash Y \quad .$

(d) Dire se i seguenti enunciati sono veri o falsi:
$\forall x \in \mathbb{N},\ x < 0;$
$\forall x \in \mathbb{Z},\ x^2 > 1;$
$\forall x \in \mathbb{Z},\ x < 0;$
$\forall x \in \mathbb{N},\ x + 0 = 0.$
Per gli enunciati falsi, modificare il quantificatore o la relazione, affinché diventino veri.

2. **Ordinamento e sue proprietà.**

- Struttura di ordine su $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ed $\mathbb{R}$. L'ordinemento su un insieme X è una relazione binaria su X che è riflessiva, antisimmetrica, transitiva. Questo significa che, se denotiamo una tale relazione con $\leq$, valgono i seguenti enunciati per tutti gli a, b e c elementi di X:

  – per ogni a, $a \leq a$ (riflessività);
  – se $a \leq b$ e $b \leq a$, allora $a = b$ (antisimmetria);
  – se $a \leq b$ e $b \leq c$ allora $a \leq c$ (transitività);
  – $a \leq b$ oppure $b \leq a$ (totalità).

- Regole per la manipolazione delle disuguaglianze:

  – se $a < b$ e $b < c$, allora $a < c$;
  – se $a < b$, allora $a + c < b + c$ e viceversa;
  – se $a < b$, allora $-a > -b$ e viceversa;
  – se $a < b$, allora $ac < bc$ e viceversa, se $c > 0$;
  – se $a < b$, allora $ac > bc$ e viceversa, se $c < 0$;
  – se $a \neq 0$, allora $a^2 > 0$;
  – se $a > 0$, allora $\frac{1}{a} > 0$ e viceversa;
  – se $a < 0$, allora $\frac{1}{a} < 0$ e viceversa;
  – se $0 < a < b$, allora $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$;
  – se $a < b$ e $c < d$, allora $a + c < b + d$;
  – se $0 < a < b$ e $0 < c < d$, allora $ac < bd$.

- In $\mathbb{Q}$ ed $\mathbb{R}$, dati due numeri $x < y$, esiste sempre $z \mid x < z < y$ (ad esempio $\frac{x+y}{2}$).

- Il valore assoluto di un numero reale si ottiene ponendo il segno del numero sul $+$. Si indica con il simbolo $|\ |$.
  Esempi:
  $|5.1| = 5.1$, $|-7.3| = 7.3$, $|\pi| = \pi$, $|-\pi| = \pi$.
  Al numero 0 si assegna il valore assoluto 0, quindi: $|0| = 0$.

3. **Espressioni algebriche.**

   - Polinomi, grado di un polinomio, zeri di un polinomio. Le espressioni costruite con variabili e numeri applicando le operazioni di moltiplicazione, addizione e sottrazione si chiamano polinomi. Ad esempio $5x^5 + 4x^3 - 7x^2 + x - 1$ è un polinomio nella variabile x. I numeri $5, 4, -7, 1, -1$ che compaiono nel polinomio si dicono coefficienti.
     La massima potenza con cui compare una variabile si dice *grado del polinomio*. L'esempio precedente è un polinomio di quinto grado. Una costante (in cui non compare variabile) può essere vista come polinomio di grado zero (poiché $x^0 = 1$).
   - Moltiplicazione dei polinomi: si effettua sfruttando la proprioetà distributiva. Si moltiplica ciascun addendo nella prima parentesi con ciascun addendo nella seconda parentesi.
     Esempi:
     $(x-3)(y+2) = xy + 2x - 3y - 6$,
     $(x-3)(x+2) = x^2 - x - 6$,
     $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$,
     $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$,
     $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$.
     D'ora in poi consideremo solo polinomi ad una variabile.
   - Scomposizione (*fattorizzazione*) dei polinomi: Data un'espressione vogliamo scriverla come prodotto di più espressioni.
     Esempi:
     $x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$
     $x^2 - x - 12 = (x+3)(x-4)$
     $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$.
     Esistono delle regole per facilitare la scomposizione dei polinomi, la più nota è la *regola di Ruffini* (che qui citiamo solamente).
   - Formula per la soluzione di un polinomio di primo grado:
     dal generico $ax + b = 0$ si ricava che $x = -\frac{b}{a}$.
   - Formula per la scomposizione dei polinomi di secondo grado: Un'equazione di secondo grado è un'equazione del tipo $ax^2+bx+c = 0$,

oppure un'equazione che può essere ridotta a questa forma. Qui a, b e c sono i coefficienti dell'equazione, e inoltre $a > 0$. Gli zeri della funzione si trovano con la formula risolutiva

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

A seconda che il numero sotto radice $b^2 - 4ac$ sia negativo, nullo oppure positivo, l'equazione non ammette soluzioni reali, ne ammette una oppure due. Il numero $b^2 - 4ac$ decide quindi il numero di soluzioni ed è detto discriminante. Esempi:
$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = 3.$

- Espressioni razionali Esempi:
  $\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{x}$,
  $\frac{\sqrt{x}(1+y)^2}{x\sqrt{1+y}} = x^{-1/2}(1+y)^{3/2}$.
- Non tutte le equazioni sono risolvibili in $\mathbb{R}$ (esempi: $x^2 + 1 = 0$, ma anche $x^2 - x + 1 = 0$).
- **Esercizi:**
  (a) Dimostrare che, se in un polinomio la variabile x compare in tutti gli elementi (esempio: $x^3a + x^2b + xc$), quel polinomio si annulla per $x = 0$.
  (b) Scomporre il seguente polinomio: $x^3 + 3x^2 + 2x = 0$
  (c) Scomporre il seguente polinomio: $x^4 - 7x^2 + 10 = 0$

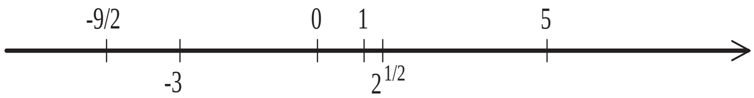
3 Riferimenti cartesiani

1. **Sistemi di riferimento nel piano e nello spazio.**

   - Gli elementi di $\mathbb{R}$.

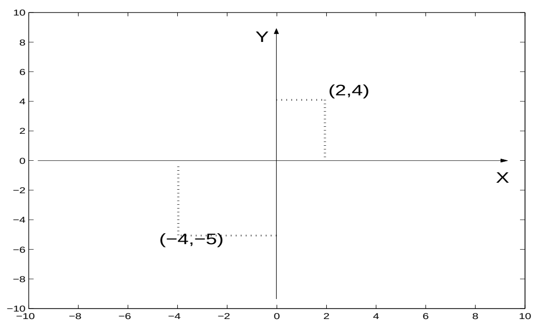
     Data una retta, fissiamo un punto O ed un punto U. O rappresenta l'*origine*, ad OU viene assegnato valore (lunghezza) 1. OU rappresenta l'*unità di misura*, il verso secondo cui O precede U il *verso positivo*. La retta così ottenuto è una retta *orientata*.

     Ad ogni elementi di $\mathbb{R}$ può essere assegnato un punto lungo una retta orientata in cui l'origine corrisponde a $0 \in \mathbb{R}$, la porzione alla sua destra prende il nome di *semiasse positivo* e quello a sinistra *semiasse negativo*. La relazione, a differenza che per gli altri insiemi numerici, è biunivoca: ad ogni punto su di una retta orientata può essere assegnato un elemento di $\mathbb{R}$.



   - Gli elementi di $\mathbb{R}^2$ e coordinate cartesiane.

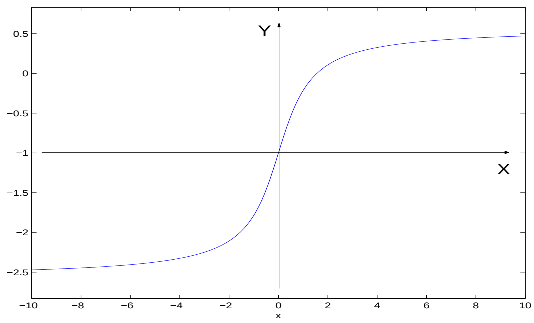
     $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ Il piano cartesiano non è altro che la rappresentazione del prodotto cartesiano. Di nuovo, esiste una relazione biunivoca fra i punti nel piano e le coppie (x, y) nello spazio.
     L'*ascissa* è l'asse coordinato orizzontale ed orientato da sinistra a destra
     L'*ordinata* è l'asse coordinato verticale ed orientato dal basso verso l'alto
     Gli assi coordinati si intersecano in $(0, 0)$ (è una convenzione).



Ascissa ed ordinata non devono necessariamente avere la stessa unità di misura
In $\mathbb{R}^2$ è naturale rappresentare le funzioni reali di variabile reale:

$$f : A \to B$$

Dove A, B sono sottoinsiemi di $\mathbb{R}$. Rappresentiamo A lungo l'asse delle ascisse e B lungo l'asse delle ordinate. Sul piano è possibile rappresentare le coppie $(x, f(x))$.



- Quadranti.

  La porzione del piano delimitata dai semiassi positivi si dice *I quadrante* (vedremo che è un *luogo geometrico*), gli altri vengono numerati in senso antiorario.

  I quadrati vengono spesso nominati anche con le coordinate geografiche: *quadrante di nordest, nordovest ecc.*
- Gli elementi di $\mathbb{R}^3$.

  In modo del tutto analogo, esiste una relazione biunivoca tra i punti nello spazio e gli elementi del prodotto cartesiano $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.
- Coordinate cartesiane nello spazio.

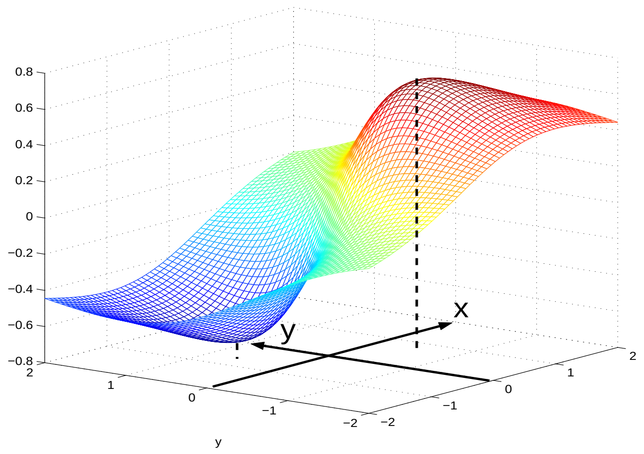
  Fissiamo un piano, ed in esso un sistema di assi cartesiani, ed immaginiamolo disposto orizzontalmente.

  Prendiamo una retta (orientata) ad esso perpendicolare e passante per l'origine. Le triple (x, y, z) rappresentano le coordinate cartesiane nello spazio

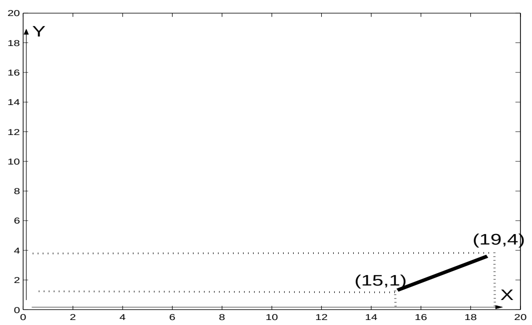
  Un sistema di assi nello spazio permette di rappresentare funzioni reali di due variabili reali:

$$f : A \to B$$

  Dove $A \subseteq \mathbb{R}^2$ è una porzione di un piano e $B \subseteq \mathbb{R}$.



2. **Distanza tra due punti nel piano.**
La distanza fra due punti nel piano è pari alla lunghezza del segmento che li congiunge.
Per determinare la distanza fra due punti nel piano cartesiano si usa il *Teorema di Pitagora: "in un triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'ipotenusa è uguale alla somma dei quadrati costruiti sui cateti"*.
Esempio: Considerate i due punti $(15, 1)$ e $(19, 4)$.



Il cateto x_1x_2 misura $x_2 - x_1 = 4$, il cateto y_1y_2 misura $y_2 - y_1 = 3$. La distanza fra i due punti è allora pari alla lunghezza dell'ipotenusa del triangolo rettangolo così ottenuto,

$$d = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$

Per qualsiasi coppia di punti $(x_1, y_1); (x_2, y_2)$ è possibile costruire tale rappresentazione. In generale quindi

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

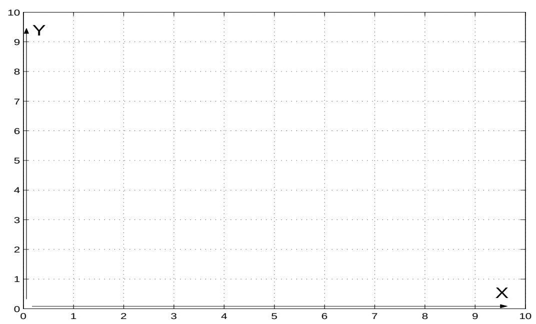
Arttenzione, non imparate la formula a memoria, in particolare i nomi delle variabili. Gli assi prendono nomi diversi da x, y a seconda del problema (leggi, funzione) che si vuole rappresentare. Inoltre, se si considera l'insieme $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ direttamente, spesso si indicano $x, y \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ come $(x_1, x_2); (y_1, y_2)$

3. **Luoghi geometrici.**

   - Un luogo geometrico è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ (o $\mathbb{R}^3$) caratterizzato da una certa proprietà (sono quasi tutti insiemi infiniti e non sarebbe possibile elencarne gli elementi).
     Esempi:

     (a) il luogo geometrico dei punti le cui coordinate sono entrambe numeri interi:
     $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \in \mathbb{Z} \ e \ y \in \mathbb{Z}\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | (x, y) \in \mathbb{Z}^2\} = \mathbb{Z}^2$
     ;

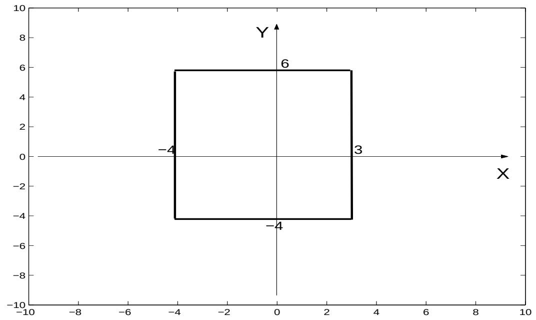
     (b) il luogo geometrico dei punti in cui almeno una coordinata è un numero intero:
     $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \in \mathbb{Z} \ o \ y \in \mathbb{Z}\}$.



   - Luoghi geometrici definiti da uguaglianze.
     Ad esempio le bisettrici dei quadranti:
     $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = y\}$
     $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = -y\}$

   - Luoghi geometrici definiti da disuguaglianze.
     Ad esempio i quadranti:
     I quadrante $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq 0 \ e \ y \geq 0\}$
     IV quadrante $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq 0 \ e \ y \leq 0\}$

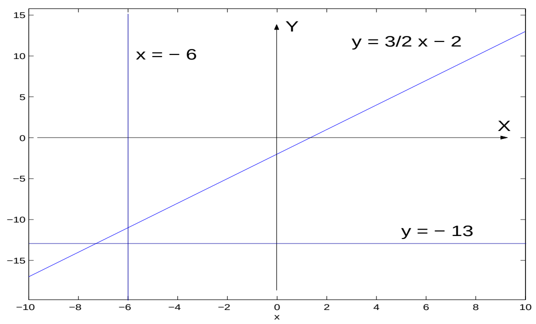
Rettangolo:
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | b_1 \leq x \leq b_2 \ e \ h_1 \leq y \leq h_2\}$



I luoghi geometrici possono essere molto più complicati:
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \leq 5 + 2y^2 \ e 0 \leq y \leq 7\}$.

4. **Rette.**

- Rappresentazione di una retta.
  Ogni retta nel piano cartesiano può essere rappresentata o come $y = ax + b$, oppure come $x = c$.



Noi ci occuperemo prevalentemente delle rette del primo caso, che rappresentano le *funzioni lineari* da x in y.
b rappresenta il valore della funzione per $x = 0$, graficamente rappresenta sull'asse delle y il punto di intersezione con la retta.
a rappresenta l'inclinazione della retta: $a = 1$ corrisponde all'inclinazione di 45°, per $a > 1$ si avrà una pendenza maggiore, per $a < 1$ maggiore. a è detto *coefficiente angolare*
Le rette $y = b$ sono parallele all'asse delle x e sono chiamate costanti, perché rappresentano le funzioni che associano ad ogni x lo stesso valore di y.

- Rette parallele.
  Due rette sono parallele se e solo se hanno lo stesso coefficiente angolare.
- Rette perpendicolari.
  Prese due rette $y = a_1x + b_1$ e $y = a_2x + b_2$ sono perpendicolari se $a_1a_2 = -1$
- Retta passante per un punto.
  Dato un punto assegnato $P_0(x_0, y_0)$ ed una retta generica $y = ax + b$, la retta passa per $P_=$ se e solo se l'equazione è soddisfatta dalla coordinate del punto, cioè se $y_0 = ax_0 + b$. Mettendo le due equazioni a sistema e sottraendo membro a membro si trova che ogni retta passante per P_0 soddisfa

  $$y - y_0 = a(x - x_0)$$

  Esercizio: trovare l'equazione delle rette passanti per $(5, 7)$
- Equazione della retta passante per due punti.
  Sia $P_1(x_1, y_1)$ un punto distinto da P_0. Per i punti P_0, P_1 passa una ed una sola retta. Tale retta passa per P_0 e quindi soddisfa $y - y_0 = a(x - x_0)$. Sostituendo alle generiche x, y le coordinate del punto P_1 otteniamo il coefficiente angolare della retta:

  $$a = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

  Non resta che sostituire il coefficiente angolare trovato nell'equazione della retta passante per P_0 (notate che l'unico paramentro libero in detta equazione è il coefficiente angolare):

  $$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

  Esempio:

  (a) Trovare e rappresentare la retta passante per $P_0(5, 7)$, $P_1(5, -3)$. In questo caso la retta è semplicemente la parallela all'asse delle ordinate passante per P_0 e P_1, cioè $x = 5$.
- Semipiani.
  Si dice semipiano la porzione di piano delimitata da una retta. Esempio: Tutti i punti sopra $y = 2x - 3$:
  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y > 2x - 3\}$.

Un semipiano si dice *aperto* se non contiene i punti della retta che lo delimita, *chiuso* viceversa. Poichè esistono infinte rette, esistono infiniti modi di dividere un piano in due semipiani, uno aperto ed uno chiuso.

5. **Parabole**

Per parabole intendiamo quei punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ per cui vale l'identita

$$y = ax^2 + bx + c, \text{ con } a, b, c \in \mathbb{R} \ .$$

Per trovare l'interesezione della parabola sull'asse delle y poniamo $x = 0$, otteniamo $y = c$.

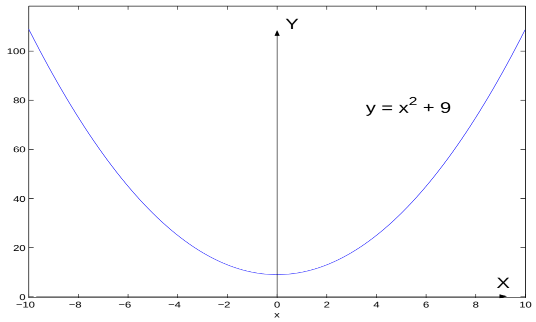
La parte destra dell'identità rappresenta un polinomio e noi abbiamo già visto la formula per trovarne gli zeri ($x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$): questi, se esistono, saranno i punti di intersezione sull'asse delle x della parabola.

Esempi:

(a) Rappresentare la parabola $y = x^2 + 9$

Intersezione con asse y: $x = 0 \Rightarrow y = 9$

Non ha intersezioni con l'asse x perché $\sqrt{b^2 - 4ac} = \sqrt{-36}$ non esiste.



(b) Rappresentare la parabola $y = x^2 - 8x + 15$.

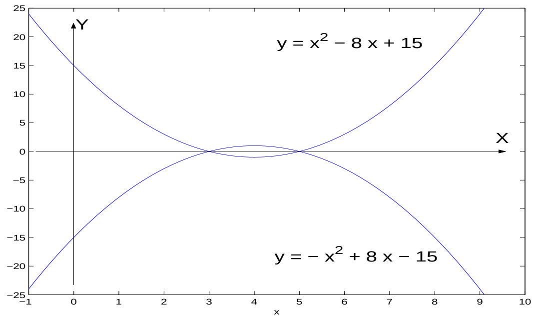
Intersezione con asse y: $x = 0 \Rightarrow y = 15$.

Intersezione con asse x: $x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{8^2 - 4(1 \cdot 15)}}{2} = \frac{8 \pm 2}{2}$, $x_1 = 3$ ed $x_2 = 5$; da cui $y = (x - 3)(x - 5)$.

(c) Rappresentare la parabola $y = -x^2 + 8x - 15$.

Intersezione con asse y: $x = 0 \Rightarrow y = -15$.

Intersezione con asse x: ha le stesse intersezioni della precedente, perché nella formula tutti i segni opposti si compensano (provare per credere).



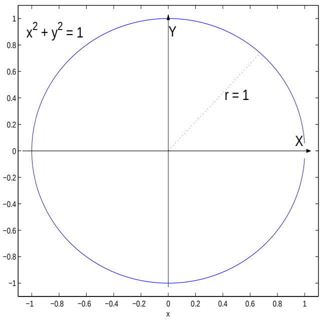
6. Parabole verso l'alto e verso il basso, interpretazione geometrica di massimi e minimi delle parabole.
   Geometricamente il *vertice* di una parabola corrispondono al punto più in *alto* o più in *basso*, a seconda che la parabola sia rivolta verso il basso o verso l'alto. Lo farete quando risolverete problemi di massimo, è inutile ricordare formule a memoria.

7. **Circonferenze.**

   - Equazione di una circonferenza centrata nell'origine nel piano cartesiano.
     La circonferenza di centro $C(x_0, y_0)$ e raggio r è il luogo dei punti del piano che distano r da C. Quindi, è:
     $$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r\}$$
     $$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2\}$$
     Una circonferenza con centro $(0, 0)$ e raggio r ha quindi equazione
     $$x^2 + y^2 = r^2$$

     La circonferenza non è né una funzione da x a y, né una funzione da y a x (perché? quanti valori associa una funzione ad ogni elemento?).
     Per il caso generale ($x^2 + x^2 + ax + cy + d = 0$) e le formule relative, vedete il libro. A noi interessa la definizione come luogo geometrico

   - Rapporto fra raggio e circonferenza.
     Tutti le circonferenze sono simili. Di conseguenza, una volta centrate sullo stesso punto, la lunghezza della circonferenza deve essere proporzionale al raggio. Nello specifico, $c = 2\pi r$



- Area del cerchio.

  La formula dell'area del cerchio può essere ottenuta a partire da quelle della lunghezza della circonferenza e dell'area del triangolo.

  Si immagini un esagono regolare (figura geometrica con sei lati) iscritto nella circonferenza e diviso in triangoli uguali, aventi i vertici nel centro dell'esagono. L'area dell'esagono può essere calcolata come somma delle aree dei triangolo $(6 \cdot (base \cdot h/2))$, cioè moltiplicando la somma delle basi dei triangoli (che è il perimetro dell'esagono) per la loro altezza e dividendo per due. In formule $Area_{esagono} = \frac{perimetro \cdot h}{2}$.
  Questa è la stessa formula dell'area del cerchio, laddove l'altezza è ora rappresentata dal raggio r:
  $Area_{cerchio} = \frac{perimetro \cdot r}{2} = \frac{(2\pi \cdot r) \cdot r}{2} = \pi \cdot r^2$.

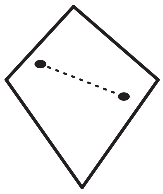
8. **Area e perimetro di figure piane.**

- I poligoni

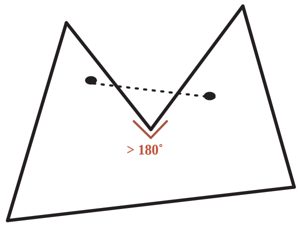
  Un poligono è una forma geometrica piana: è quella parte di piano delimitata da una linea spezzata chiusa non intrecciata. I segmenti che compongono la spezzata chiusa si dicono lati del poligono.

  Un poligono è detto *convesso* quando comunque presi due punti appartenenti al poligono, anche il segmento che li congiunge è un sottoinsieme del poligono stesso (insieme convesso); *concavo* altrimenti. Un esempio di poligono concavo è una stella: il segmento che unisce due sue punte è esterno al poligono. Una definizione equivalente di poligono concavo è quella per cui almeno uno dei suoi angoli interni è maggiore di un angolo piatto.

  Un poligono è detto *regolare* quando tutti i lati e tutti gli angoli sono uguali, oppure *irregolare* negli altri casi. Esempi di poligoni regolari sono il triangolo equilatero ed il quadrato. Esempi di



Poligono convesso



Poligono concavo

poligoni irregolari sono il rombo generico (i lati sono uguali, gli angoli no), il rettangolo generico (gli angoli sono uguali, i lati no) ed il trapezio.

- I poligoni come intersezione di semipiani.

  Data la definizione di semipiani ($\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | ay + bx + c \substack{\leq \\ >} 0\}$) qualsiasi poligono convesso può essere definitito come l'intersezione di semipiani. Ad esempio:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq 2\}$$
$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \leq 4\}$$
$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y \geq 0\}$$
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \leq 2\}$$

  $A \cap B \cap C \cap D$ è il quadrato di base 2.

- Il perimetro di un poligono è dato dalla somma delle lunghezze dei lati.

  Non serve quindi imparare alcuna formula nuova per calcolare il perimetro di un poligono su di un piano cartesiano: basta la distanza fra due punti, applicata alla distanza fra ciascuna coppia di vertici del poligono.

- Area dei rettangoli.

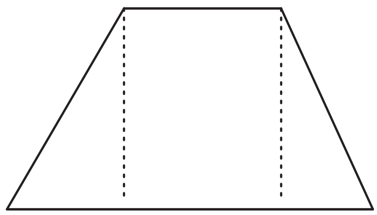
  L'area di un rettangolo è pari a *base · altezza*. Di nuovo, in un piano cartesiano tutto ciò che serve sono le coordinate dei vertici e la formula della distanza fra due punti.

- Area dei triangoli.

  $\frac{base \cdot altezza}{2}$

- Tutti i poligoni possono essere scomposti in rettangoli e triangoli.

  Esempi: trapezio, rombo, esagono, figure non regolari



Trapezio

Le aree sono additive ma NON i perimetri.

Basta prendere un trapezio: i lati in comune fra il rettangolo ed i due triangoli non vanno contati.

9. **Superficie e volume di solidi nello spazio.**

   - Area dei parallelepipedi.
     Per parallelepipedo si intende usualmente una figura solida le cui facce sono tutte rettangoli (e sono in numero di 6).
     Le dimensioni sono tre: altezza h, lunghezza l e larghezza k.
     Il volume è dato dal loro prodotto: $h \cdot l \cdot k$.
     Per la superficie bisogna sommare l'area delle sei facce. Pensate di smontare il parellelepipedo e farlo diventare 6 figure piane. La formula diventa: $2(h \cdot l + h \cdot k + l \cdot k)$.
   - Solidi che hanno per base figure piane: prismi e cilindri.
     In questo caso il volume è dato da:
     $Volume = area_{base} \cdot altezza$.
     La superficie è data da:
     $Superficie = 2 \cdot area_{base} + perimetro_{base} \cdot altezza$.
     Di nuovo, pensate di smontare un cilindro: ottenete 2 cerchi ed un rettangolo di base la circonferenza e altezza l'altezza del cilindro.

10. **Esercizi svolti:**

    (a) Disegnare come una retta la funzione identità.

    funzione identità: $f(x) = x \to y = x$, la bisettrice di primo e terzo quadrante.

    (b) Determinare l'equazione della retta passante per $(4, 5)$, parallela a $y = 3x + 2$.

    retta passante per $(4, 5)$: $y - 5 = a(x - 4)$
    retta parallela a $y = 3x + 2$: $y = 3x + 2 + b$

Devo trovare una retta che soddisfa la prima equazione ed ha coefficiente angolare pari alla seconda:

$$y - 5 = 3(x - 4)$$

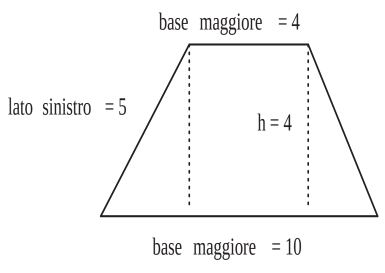
(c) Rappresentare nel piano cartesiano l'insieme
$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - 2| < 1\}$.
L'insieme è pari all'unione dei due insiemi:
$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 2 \ e \ x - 2 < 1\}$
$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 2 \ e \ -x + 2 < 1\}$
Cioè,
$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq x < 3\}$
$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x < 2\}$
Quindi, $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x < 3\}$

(d) Rappresentare nel piano cartesiano l'insieme
$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4 \text{ e } x \geq y\}$.
L'insieme è pari all'intersezione della circonferenza centrata nell'origine e di raggio 2 e del semipiano (aperto) sotto la bisettrice:
$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 2^2\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x\}$

Esercizi:

(e) Assegnati due punti A e B aventi distanza uguale a $10cm$, determinare tutti i punti C tali che i triangoli ABC abbiano area uguale a $20cm^2$.

(f) Calcolate area e perimetro della seguente figura:



4 Esponenziali e logaritmi

1. **Esponenziali.**

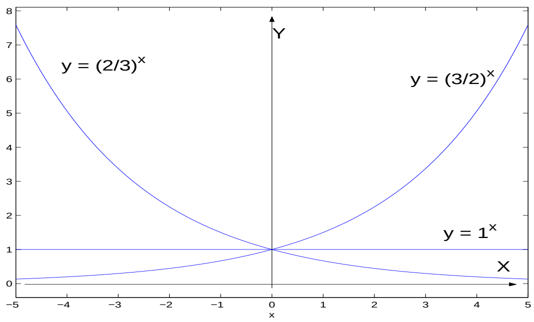
   - Funzioni esponenziali.

     $$f : x \longrightarrow a^x$$

     E' una funzione da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$. Consideriamo sempre il caso $a > 0$.

   - Grafico della funzione esponenziale.
     Prendiamo due esempi, $a = \frac{2}{3}$ ed $a = \frac{3}{2} = 1.5$:

$a = \frac{2}{3}$	x	$a = \frac{3}{2}$
5.063	-4	0.198
3.375	-3	0.296
2.25	-2	0.444
1.5	-1	0.667
1	0	1
0.667	1	1.5
0.444	2	2.25
0.296	3	3.375
0.198	4	5.063



   - Positività e simmetria.*
     Se $a > 0 \Rightarrow a^x > 0 \ \forall x$.
     Non consideriamo qui il caso in cui $a \leq 0$ perché consideriamo tutte le $x \in \mathbb{R}$. Abbiamo visto, ad esempio, che $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$, ma se a è negativo $\sqrt{a}$ non esiste.
     Notate poi che $a^{-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$. Quindi le funzioni $x \rightarrow a^x$ e $x \rightarrow \frac{1}{a^x}$ sono *simmetriche rispetto all'asse delle* y

   - Monotonia della funzione esponenziale.
     Se $a > 1$ allora:

     $$x > y \Longleftrightarrow a^x > a^y$$

     Per convincersi, basta considerare $a > 1$ e moltiplicare a destra e sinistra per il numero positivo a^x, qualsiasi sia x: $\forall x \ a^{x+1} > a^x$
     se invece $a < 1$ allora:

     $$x < y \Longleftrightarrow a^x < a^y$$

*Il concetto di simmetria che utilizziamo è solo quello grafico ed intuitivo, che comunque equivale alla definizione rigorosa che daremo in seguito.

cosa succede per $a = 1$? La funzione esponenziale coicide con la costante 1: $\forall x \; 1^x = 1$
Dalle proprietà precedenti discende che se $x \neq y$, allora $a^x \neq a^y$ per ogni $a \neq 1$ (cioè, se $a \neq 1$, la funzione $f(x) = a^x$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, è iniettiva).

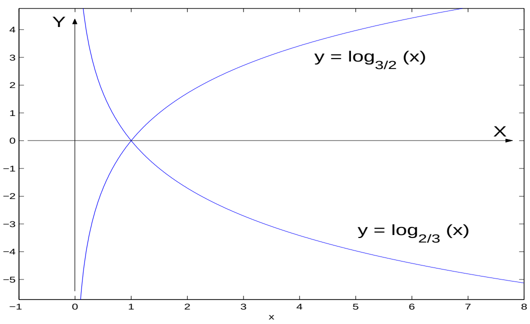
- Il numero e (detto anche *numero di Eulero*).
  e è un numero reale con molte proprietà specifiche. Una sua approssimazione decimale è $e = 2.71828\ldots$.
  Questa è la definizione più semplice di e: e è l'unico numero tale che, per ogni $x \in \mathbb{R}$
  $$e^x \geq 1 + x \; .$$
  Quindi, poichè per ogni base positiva a, $y = a^x$ passa per $(0, 1)$, e^x è tangente ad $y = 1 + x$ in $(0, 1)$ (vedi grafico). Cioè, è l'unico valore per cui il coefficiente angolare della tangente in $(0, 1)$ è pari ad 1. L'utilità del numero di Eulero risulterà chiara nello studio delle derivate.
- Esponenziale naturale: $exp(x) = e^x$.

2. **Logaritmi.**

- Definizione.
  Dati $a > 0$ $(a \neq 1)$ e $b > 0$ chiamiamo *logaritmo di b in base a* ($\log_a b$) il numero (univocamente determinato) x per il quale si ha $a^x = b$.
  In base alla definizione abbiamo $a^x = b \;\Leftrightarrow\; \log_a b = x$.
  Provate a calcolare i seguenti logaritmi:
  $\log_3 27$: $x : \; 3^x = 27 \Rightarrow x = 3$,
  $\log_4 16 = 2$: $x : \; 4^x = 16 \Rightarrow x = 2$
  $\log_{10} 1 000 000 = 6$,
  $\log_{\sqrt{2}} 4 \; x : \; \sqrt{2}^x = 4 \Rightarrow 2^{x/2} = 4 \Rightarrow 4$.
- Funzione inversa di quella esponenziale.
  Il logaritmo è la funzione inversa della funzione esponenziale.
  L'esponenziale, ad ogni x associa una y pari a a^x. La sua funzione inversa, ad ogni y associa una x tale che $y = a^x$, cioè il logaritmo in base a di y, dove $a > 0, a \neq 1$ e $y > 0$ è l'esponente da attribuire ad a per ottenere y:
  $$a^{\log_a y} = y$$

- Grafico della funzione logaritmo.

  La funzione $log_a x$ e la funzione a^x sono simmetriche rispetto alla bisettrice. Questo per il fatto che una è l'inversa dell'altra: prendete il grafico dell'esponenziale e ribaltate asse x ed y, cioè ruotate il piano cartesiano attorno alla bisettrice. Se la funzione di partenza ad x associa y secondo una data regola rappresentata dal grafico, l'inversa associa ad y una x secondo l'inverso della stessa regola, cioè dello stesso grafico.



  Si noti come non sia definibile, come funzione, il logaritmo di base $a = 1$.

- Logaritmo in base 10.

  Una base comunemente usata è la base 10. Di solito si scrive $\log_{10} x = \text{Log } x$

- Logaritmo naturale: $\log_e x = \log x = \ln x$.

- Alcune regole di calcolo:

  (a) $\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$;

  (b) $\log_a b^k = k \cdot \log_a b$;
  da cui $\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b$;
  da cui $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$.

  (c) $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$
  Di quest'ultima identità, nota come formula del cambiamento di base, diamo la dimostrazione:
  dall'espressione precedente otteniamo

  $$\log_b x \cdot \log_a b = \log_a x$$

  elevando a per la parte sinistra abbiamo

  $$a^{\log_b x \cdot \log_a b} = (a^{\log_a b})^{\log_b x} = b^{\log_b x} = x$$

La prima eguaglianza deriva dalla proprietà commutativa del prodotto;
La seconda dal fatto che dalla definzione $\log_a b$ è l'esponente da attribuire ad a per ottenere b; la terza usa la stessa proprietà.
Ora eleviamo a per la parte destra dell'enunciato e di nuovo $a^{\log_a x} = x$.

3. **Esercizi svolti:**

   (a) Semplificare l'espressione $\log_2(10 \cdot x) - \log_2 40$.
   $\log_2 10 + \log_2 x - \log_2(10 \cdot 4)$
   $\log_2 10 + \log_2 x - \log_2 10 - \log_2 4$
   $\log_2 x - 2$

   (b) Risolvere $\ln x = e$
   $e^{\ln x} = e^e \Rightarrow x = e^e$

   (c) $(\ln x^2) = 2$
   $\ln x = \sqrt{2} \Rightarrow x = e^{\sqrt{2}}$

   (d) $\ln|\ln x| = 0$
   $\ln_a x = 0$ ha sempre soluzione 1, qualsiasi sia la base.
   $|\ln x| = 1$
   se $x \geq 1$, $\ln x = 1$ e quindi $x = e$ se $x < 1$, $-\ln x = 1 \Rightarrow e^{\ln x} = e^{-1}$ e quindi $x = e^{-1} = \frac{1}{e}$

   (e) $e^{-2x} = 2$
   $\ln e^{-2x} = \ln 2 \Rightarrow -2x \ln e = \ln 2 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}\ln 2$

   Esercizio:

   (f) tracciare i grafici di $f(x) = \min\{1, e^x\}$, $f(x) = \max\{x, x^2\}$, $f(x) = \max\{0, \ln x\}$.

5 Equazioni e disequazioni

1. **Equazioni razionali.**

   - Equazioni di primo grado.

     Il grado di un'equazione ridotta in *forma normale*, ossia nella forma $P(x) = 0$ è il grado del polinomio $P(x)$. Un'equazione di primo grado in forma normale è quindi sempre

     $$ax + b = 0$$

     Se $a = b = 0$ l'equazione ha infinite soluzioni e si dice *indeterminata*. Se $a = 0, b \neq 0$ l'equzione non ha soluzioni e si dice *impossibile*. Infine, se $a \neq 0$ l'equazione ha una ed una sola soluzione (*radice*) pari a

     $$x = -\frac{b}{a}$$

     Esempi:

     (a) $2(3x + 1) - 3(2x + 1) = 4(x - 1) - (4x + 3)$
     $6x + 2 - 6x - 3 = 4x - 4 - 4x - 3$
     $6x - 6x - 4x + 4x + 2 - 3 + 4 + 3 = 0$
     $6 = 0$
     L'equazione è impossibile

     (b) Di che grado è l'equazione $(x+2)^2 - 3(x-1) = 2x + (x-1)^2$? Trovarne le radici.
     $(x + 2)^2 - 3(x - 1) = 2x + (x - 1)^2$
     $x^2 + 4x + 4 - 3x + 3 = 2x + x^2 - 2x + 1$
     $x + 6 = 0$
     Una volta ridotta in forma normale, l'equazione è di primo grado (notare che i polinomi a destra e sinistra del segno di uguale sono invece di secondo grado). Ha un'univa radice, $x = -6$

   - Equazioni di secondo grado.

     Abbiamo già visto che un'equazione di secondo grado in forma normale $ax^2 + bx + c = 0$ ha al massimo due radici, che si trovano

     $$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

     Il numero di radici dipende dal segno del discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$:

$\Delta > 0$ due radici distinte e reali;

$\Delta = 0$ due radici coincidenti, ovvero una sola radice;

$\Delta < 0$ nessuna radice reale.

Esempi:

(a) $(x-3)(x+3)-(2x-1)^2+14=0$
$x^2-9-4x^2+4x-1+14=0$
$-3x^2+4x+4=0$
$3x^2-4x-4$
$x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16+48}}{6}$
$x=(4\pm\sqrt{64})/2$
$x_1=\frac{4+8}{6}=2,\ x_2=\frac{4-8}{6}=-\frac{2}{3};$

(b) $x^2-(4-x)^2+x\left(\frac{1}{3}-x\right)=\frac{1}{3}(1+x)$
$x^2-16+8x-x^2+\frac{1}{3}x-x^2=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}x$
$-x^2+8x-16-\frac{1}{3}=0$
$\Delta=64-4(16+\frac{1}{3})=-\frac{4}{3}<0$
non c'è nessuna radice reale;

(c) $(3x-1)^2+2(x+4)=8+5x^2$
$9x^2-6x+1+2x+8=8+5x^2$
$4x^2-4x+1=0$
$x=\frac{4\pm\sqrt{16-16}}{8}=\frac{1}{2}.$

Più interessanti sono le equazioni *parametriche*, in cui fra i coefficienti a, b, c ci sono espressioni letterali. in questo caso, occorre:

- valutare le *condizioni di esistenza* delle eventuali frazioni, cioè escludere i valori dei parametri per cui gli eventuali denominatori sono nulli;
- discutere per quali valori del parametro l'equazione si abbassa di grado, e rispvere di conseguenza;
- discutere al variare del parametro esistenza e numero delle soluzioni (cioè, il segno del determinante).

Esempi:

(a) $m^2x^2+m-1=0$

Non ci sono denominatori, nessuna condizione di esistenza.
Se $m=0$ l'equazione si abbassa di grado: $1=0$, impossibile.
Se $m\neq 0$,

$x_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{0-4m^2(m-1)}}{2m^2} = \frac{\pm 2m\sqrt{-(m-1)}}{2m^2}$
$x_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{1-m}}{m}$
Se $m = 1$ ha un'unica soluzione pari a 0;
Se $m < 1; m \neq 0$ ha due radici opposte $\frac{\pm\sqrt{1-m}}{m}$;
Se $m > 1$ non ha radici reali.

(b) $\frac{a-1}{a-2}x^2 - 2x + \frac{5-15a}{a-2} = 0$

Condizione d'esistenza delle frazioni: $a \neq 2$
Se $a \neq 2$ il denominatore è sempre diverso da 0, posso quindi moltiplicare ambo i membri per il denominatore comune e risolvere:
$(a-1)x^2 - (a-2)2x + (5-15a) = 0$
Se $a = 1$ l'equazione si abbassa di grado:
$2x - 10 = 0 \Rightarrow x = 5$
Se $a \neq 2; a \neq 1$
$x = \frac{(a-2)2\pm\sqrt{(-2(a-2))^2-4(a-1)(5-15a)}}{2(a-1)}$
$x = \frac{2(a-2)\pm\sqrt{4(a-2)^2-4(5a-15a^2-5+15a)}}{2(a-1)}$
$x = \frac{2(a-2)\pm 2\sqrt{(a^2-4a+4)-(5a-15a^2-5+15a)}}{2(a-1)}$
$x = \frac{(a-2)\pm\sqrt{a^2-4a+4-5a+15a^2+5-15a}}{a-1}$
$x = \frac{a-2\pm\sqrt{16a^2-24a+9}}{a-1}$
$x = \frac{a-2\pm\sqrt{(4a-3)^2}}{a-1}$
Il determinante è sempre positivo qualunque sia il valore di a.
Quindi, se $a \neq 2; a \neq 1$ l'equazione ha due soluzioni distinte:
$x_1 = \frac{a-2+(4a-3)}{a-1} = \frac{5a-5}{a-1} = 5$
$x_2 = \frac{a-2-(4a-3)}{a-1} = \frac{-3a+1}{a-1}$

Nelle equazioni di secondo grado *fratte*, cioè quelle in cui l'incognita compare anche al denominatore, bisogna discutere le condizioni di esistenza delle frazioni, cioè bisogna imporre le condizioni di esistenza. Per il resto, si risove come un'equazione intera.

Esempi:

(a)
$$\frac{x^2-4x+6}{x^2-3x+2} - \frac{27}{x-2} = 1 - \frac{26+x}{x-1}$$
$\frac{x^2-4x+6}{(x-1)(x-2)} - \frac{27}{x-2} = 1 - \frac{26+x}{x-1}$
Bisogna quindi imporre $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$

Date queste condizioni di esistenza i denominatori sono sempre minori di 0 e si può quindi moltiplicare a destra e sinistra per il fattor comune
$x^2 - 4x + 6 - 27(x-1) = (x-1)(x-2) - (26+x)(x-2)$
E ci siamo ricondotti al caso precedente.

(b)
$$\frac{1}{x+a} + \frac{2a}{x^2-a^2} + \frac{1}{a} = 0$$
$\frac{1}{x+a} + \frac{2a}{(x-a)(x+a)} + \frac{1}{a} = 0$
Le condizioni di esistenza sono $x \neq \pm a$ e $a \neq 0$
Date le condizioni di esistenza il denominatore è sempre diverso da 0, quindi
$(x-a)a + 2a^2 + (x-a)(x+a) = 0$
$ax - a^2 + 2a^2 + x^2 - a^2 = 0$
$x^2 + ax = 0$
$x(x+a) = 0$
Le soluzioni sarebbero $x = 0; x = -a$. La seconda è però esclusa dal campo di esistenza, quindi l'equazione ha una sola soluzione pari ad $x = 0$

2. **Disequazioni razionali.**

Prima di cominciare apriamo una parentesi sulla notazione. Con (a, b) si intende l'insieme dei numeri $\{x : a < x < b\}$.
Quando le disuguaglianze non si intendono strettamente si usa la parentesi quadra.
Così $[a, b)$ sta per $\{x : a \leq x < b\}$, $(a, b]$ per $\{x : a < x \leq b\}$ e $[a, b]$ per $\{x : a \leq x \leq b\}$.
Per gli insieme non limitati da entrambe le parti, come $\{x : a < x\}$, si usa la notazione $(a, +\infty)$.
Così $[a, +\infty)$ sta per $\{x : a \leq x\}$, $(-\infty, b)$ per $\{x : x \leq b\}$ e $(-\infty, b]$ per $\{x : x \leq b\}$.
ATTENZIONE: $+\infty$ e $-\infty$ non sono numeri reali! In questo caso rappresentano l'*infinito* nel senso che numeri *infinitamente* grandi oppure *infinitamente* piccoli sono ammessi.
Per lo stesso motivo non ha alcun senso la parentesi quadra dalla parte del simbolo di *infinito*

- Disequazioni di primo grado.

  Tutte le disequazioni di primo grado sono riconducibili ad una forma normale lineare, esattamente come le equazioni:

$$ax + b \lesseqgtr 0$$

E la soluzione si trova immediatamente

$$x \lesseqgtr -\frac{b}{a}$$

Esempio:

$$\frac{-2x-1}{3} + 1 < \frac{1}{2} - \frac{3-2x}{6}$$

Moltiplichiamo ogni membro per il minimo comune multiplo del denominatore ed eliminiamo il denominatore. ATTTENZIONE: nelle disequazioni, bisogna fare attenzione al segno del denominaotore che si elimina (deve essere positivo, altrimenti si deve invertire il segno, $a < 0 : x < y \Longleftrightarrow ax > ay$). Se la disequazione è frazionaria vedremo che la procedura di soluzione è diversa (in sostanza non si può eliminare il denominatore).

$$-2(2x+1) + 6 < 3 - (3-2x)$$

$$-6x + 4 < 0$$

$$6x - 4 > 0$$

$$x > \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

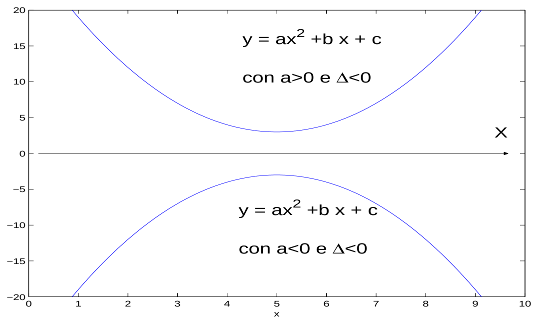
Di nuovo, il cambio di segno è necessario nel penultimo passaggio perchè moltiplichiamo a destra e sinistra per -1, così da poter dividere tutto per il coefficiente di x una volta reso positivo.

- Disequazioni di secondo grado.

  Un'equazione di secondo grado è riconducibile a

$$ax^2 + bx + c \lesseqgtr 0$$

  Si tratta quindi di studiarne il segno. Se l'equazione corrispondente non ha radici, la disequazione o non ha soluzioni essa stessa, o ha come soluzione l'intero asse reale. Pensate ad una parabola: se non ha intersezioni con l'asse delle x (le radici), assume valori



di y o tutti positivi (se sta sopra l'asse x ed è rivolta verso l'alto) o tutti negativi.

Se ha una o due radici, data la formula di risoluzione che permette di trovare le radici x_1, x_2 (distinte se $\Delta > 0$ o coincidenti se $\Delta = 0$), la disequazione si può sempre scrivere come

$$(x - x_1)(x - x_2) \lesseqgtr 0$$

Di nuovo bisogna fare attenzione al segno del polinomio: per comodità conviene ricondursi a trinomi con segno del coefficiente di x^2 positivo. Per farlo, può essere necessario invertire la disequazione.

Detto questo, dato che *il prodotto di due fattori è positivo solo se il segno dei fattori è concorde*, la ricerca delle soluzioni della disequazioni si riconduce allo studio del segno dei due fattori. Il tutto può essere svolto per via grafica.

In alternativa, la disequazione si può risolvere senza ridurla al prodotto di due fattori ma limitandosi a trovare le radici e facendo riferimento al grafico della parabola. Dal grafico di una parabola si nota immediatamente che il segno di un trinomio è quello del coefficiente a per tutti e soli i valori x esterni all'intervallo delle radici.

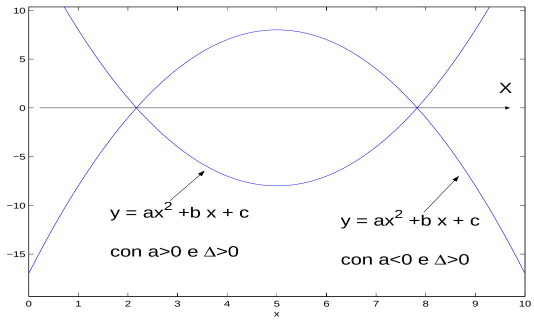
Esempi:

(a) $x^2 - 3x + 1 > 0$

Troviamo le radici:

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

La disequazione può quindi essere riscritta come



$$(x - \frac{3-\sqrt{5}}{2})(x - \frac{3+\sqrt{5}}{2}) > 0$$

Dovento trovare i valori per cui il polinomio è positivo, cerchiamo gli intervalli in cui i segni dei due fattori sono concordi:

$$- - - - - - - - - \tfrac{3-\sqrt{5}}{2} + + + + + + + + + + + +$$
$$- - - - - - - - - - - - - - - - - \tfrac{3+\sqrt{5}}{2} + + + +$$

La soluzione è quindi $\left(-\infty, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \infty\right)$.

(b) $-3x^2 + x + 2 > 0$

Per non complicarci la vita, moltiplichiamo a destra e sinistra per -1 ed invertiamo il segno della disequazione
$3x^2 - x - 2 < 0$
Le radici sono

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{6}$$

quindi $x_1 = -\frac{2}{3}$, $x_2 = 1$.
In questo caso, cerchiamo gli intervalli in cui i segni dei fattori sono DISCORDI:

$$- - - - - - - - - \tfrac{-2}{3} + + + + + + + + + + + +$$
$$- - - - - - - - - - - - - - - - - 1 + + + + +$$

La soluzione è quindi $\left(-\frac{2}{3}, 1\right)$.

(c) Risolvere il sistema

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 1 > 0 \\ -3x^2 + x + 2 < 0 \end{cases}$$

L'unica complicazione di un sistema è che viene richiesto di trovare gli intervalli che soddisfano *contemporaneamente* le

disequazioni poste a sistema. In altre parole, si cercano le intersezioni degli insiemi delle soluzioni.
Anche in questo caso ci si può aiutare rappresentando gli intervalli delle soluzioni graficamente
Atrenzione però a non fare confusione con la rappresentazione grafica di prima!
Di queste equazioni abbiamo già trovato gli intervalli delle soluzioni. Si tratta quindi di trovare:

$$\left(\left(-\infty, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \infty\right)\right) \cap \left(-\frac{2}{3}, 1\right)$$

La soluzione è quindi:

$$\left(-\frac{2}{3}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \quad .$$

(d) $9x^6 - 10x^4 + x^2 \geq 0$

Disequazioni di grado superiore al secondo si risolvono nello stesso modo: si scompone in un prodotto di fattori e si studia il segno:
$x^2(9x^4 - 10x^2 + 1) \geq 0$.
Scomponiamo il fattore tra parentesi come funzione di $y = x^2$:

$$x^2_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100-36}}{18} = \frac{10 \pm 8}{18}$$

$$x^2\left(x^2 - \frac{1}{9}\right)(x^2-1) \geq 0$$

Ora scomponiamo i singoli fattori come funzioni di x:

$$x^2\left(x - \frac{1}{9}\right)\left(x + \frac{1}{9}\right)(x-1)(x+1) \geq 0$$

Non resta che studiare il segno del prodotto e trovare gli intervalli in cui è positivo:

$$+ + + + + + + + + + + + + + 0 + + + + + + + + +$$
$$- - - - - - \left(-\tfrac{1}{9}\right) + + + + + + + + + + + + +$$
$$- - - - - - - - - - - - - - - - \tfrac{1}{9} + + + + ++$$
$$- - (-1) + + + + + + + + + + + + + + + + ++$$
$$- 1 + ++$$

Il polinomio è positivo o nullo in $(-\infty,-1] \cup \left[-\frac{1}{9}, \frac{1}{9}\right] \cup [1, \infty)$

- Disequazioni fratte.

  Un'equazione fratta è del tipo

$$\frac{f(x)}{g(x)} \lesseqgtr 0$$

  Dove $f(x)$ e $g(x)$ sono due polinomi.

  Come per il prodotto, il quoziente fra due polinomi è positivo se i loro segni sono concordi. Si tratta quindi di studiare separatamente il segno di numeratore e denominatore e poi impostare e risolvere l'opportuno sistema.

  Una cosa a cui fare attenzione, ed è l'unica differenza con il prodotto fra polinomi, è che i casi per cui il polinomio al denominatore si annulla vanno eliminati dal campo d'esistenza perchè l'espressione perde di significato.

  Esempi:

  (a) $\frac{x^2-x+5}{4x^2+x-3} \geq 0$

  Il discriminante del numeratore è $\Delta = 1 - 20 < 0$. $N(x)$ di conseguenza non si annulla mai ed è sempre positivo (il segno del trinomio è quello del coefficiente di x^2, come abbiamo visto dall'analisi grafica delle parabole).

  Possiamo quindi limitarci al denominatore. Per non perdere di significato, il denominatore deve essere sempre diverso da 0. Le soluzioni del problema iniziali sono quindi le stesse di

$$4x^2 + x - 3 > 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{8}$$

  Quindi la disequazione può essere riscritta come

$$(x+1)\left(x - \frac{3}{4}\right) > 0$$

$$- - - - - - - - - (-1) + + + + + + + + + + ++$$
$$- - - - - - - - - - - - - - - -\tfrac{3}{4} + + + +$$

  La disequazione è verificata per $(\infty, -1) \cup \left(\frac{3}{4}, +\infty\right)$

3. **Equazioni e disequazioni con il valore assoluto.**

- Equazioni con valore assoluto.

  Abbiamo già visto che la funzione modulo applicata ad un generico polinomio $f(x)$ (o ad una funzione $f(x)$), $\mid f(x) \mid$ corrisponde ad un sistema:

  $$\mid f(x) \mid = \begin{cases} f(x) & \forall x : f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \forall x : f(x) < 0 \end{cases}$$

  Di conseguenza, la funzione $\mid \cdot \mid$ è una funzione che può assumere solo valori ≥ 0 (cioè non negativi).

  Prendiamo ora un'equazione del tipo $\mid f(x) \mid = k$.

  Se $k < 0$, l'equazione non ha soluzione per la definizione di valore assoluto.

  Se $k \geq 0$, le soluzioni dell'equazione sono quelle dell'unione di due insiemi:

  $$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) = k \end{cases} \cup \begin{cases} f(x) < 0 \\ -f(x) = k \end{cases}$$

  Esempio: $|x - 5| = 3$

  $$\begin{cases} x - 5 \geq 0 \\ x - 5 = 3 \end{cases} \cup \begin{cases} x - 5 < 0 \\ -x + 5 = 3 \end{cases}$$

  $$\begin{cases} x \geq 5 \\ x = 8 \end{cases} \cup \begin{cases} x < 5 \\ x = 2 \end{cases}$$

  Le soluzioni sono quindi $x = 2$ ed $x = 8$.

- Disequazioni con valore assoluto.

  Per le disequazioni il ragionamento è lo stesso. Prendiamo $|f(x)| \lesseqgtr k$. Se $k < 0$, la disequazione è banalmente sempre falsa (se $|f(x)| < k$) e quindi non ha soluzione, o è sempre vera (se $|f(x)| > k$) e quindi ha infinite soluzioni, pari a $\mathbb{R}$ (attenzione al caso in cui $k = 0$ e la disequazione è con $\geq$ o $\leq$).

  Se $k \geq 0$, Le soluzioni sono le stesse di un'unione di due sistemi. Prendiamo il caso $|f(x)| > k$:

  $$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) > k \end{cases} \cup \begin{cases} f(x) < 0 \\ -f(x) > k \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) > k \end{cases} \cup \begin{cases} f(x) < 0 \\ f(x) < -k \end{cases}$$

Nel caso $|f(x)| < k$ il sistema è ulteriormente semplificabile:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) < k \end{cases} \cup \begin{cases} f(x) < 0 \\ -f(x) < k \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) < k \end{cases} \cup \begin{cases} f(x) < 0 \\ f(x) > -k \end{cases}$$

Quindi, $-k < f(x) < k$

Esempi

(a) $|x^2 - 1| < 15$

Usiamo la scrittura compatta $-k < f(x) < k$:

$$-15 < x^2 - 1 < 15 \longrightarrow -14 < x^2 < 16$$

La prima disequazione ($x^2 > -14$) è verificata $\forall x \in \mathbb{R}$; la seconda ($x^2 < 16$) per $-4 < x < 4$. Le due condizioni devono essere soddisfatte contemporaneamente, la disequazione è quindi soddisfatta per $-4 < x < 4$

(b) $|x - 1| > 1$

$$\begin{cases} x - 1 > 0 \\ x - 1 > 1 \end{cases} \cup \begin{cases} x - 1 < 0 \\ -(x - 1) > 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x > 2 \end{cases} \cup \begin{cases} x < 1 \\ x < 0 \end{cases}$$

La disequazione è quindi soddisfatta per $\{x \in \mathbb{R} : x < 0$ oppure $x > 2$

(c) $\left|1 + \frac{2-x}{x}\right| > 2$

Condizione di esistenza per le frazioni: $x \neq 0$. Semplifichiamo l'espressione all'interno del modulo:

$$\left|\frac{x + 2 - x}{x}\right| > 2$$

$$\left|\frac{2}{x}\right| > 2$$

Scriviamo il doppio sistema:

$$\begin{cases} \frac{2}{x} > 0 \\ \frac{2}{x} > 2 \end{cases} \cup \begin{cases} \frac{2}{x} < 0 \\ -\frac{2}{x} > 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \frac{2}{2} > x \end{cases} \cup \begin{cases} x < 0 \\ \frac{2}{x} < -2 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 1 \end{cases} \cup \begin{cases} x < 0 \\ \frac{2}{2} > -x \end{cases}$$

Attenzione all'ultimo passaggio del secondo sistema: abbiamo moltiplicato a destra e sinistra per $\frac{x}{2}$, che dalla prima condizione del sistema è un NUMERO NEGATIVO (x è negativo). Il segno della disequazione va quindi invertito!

$$\Longrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 1 \end{cases} \cup \begin{cases} x < 0 \\ x < -1 \end{cases}$$

La disequazione ha soluzione $(-1, 0) \cup (0, 1)$ o, riscrivendo, $(-1, 1) \setminus \{0\}$

(d) $\left|\frac{x+1}{x-1}\right| < 4$

Una volta posta la condizione di esistenza $x \neq 1$, possiamo di nuovo usare la notazione compatta:

$$-4 < \frac{x+1}{x-1} < 4$$

Che corrisponde al sistema

$$\begin{cases} \frac{x+1}{x-1} > -4 \\ \frac{x+1}{x-1} < 4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \frac{x+1}{x-1} + 4 > 0 \\ \frac{x+1}{x-1} - 4 < 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \frac{x+1+4x-4}{x-1} > 0 \\ \frac{x+1-4x+4}{x-1} < 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \frac{5x-3}{x-1} > 0 \\ \frac{-3x+5}{x-1} < 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \frac{5x-3}{x-1} > 0 \\ \frac{3x-5}{x-1} > 0 \end{cases}$$

Attenzione all'analisi grafica da svolgere a questo punto: cerchiamo le soluzioni delle due disequazione SEPARATAMENTE, e poi troviamo l'intersezione (cioè, le mettiamo a sistema).

Prima disequazione:

$$- - - - - - - - - (1) + + + + + + + + + + + +$$
$$- - - - - \frac{3}{5} + + + + + + + + + + + + + + + +$$

Ha soluzione $x < \frac{3}{5}$ o $x > 1$.

Seconda disequazione:

$$- - - - - - - - - \frac{5}{3} + + + + + + + + + + + +$$
$$- - - - - (1) + + + + + + + + + + + + + + + +$$

Ha soluzione $x < 1$ o $x > \frac{5}{3}$

Mettendo a sistema, la disequazione iniziale a soluzione $(-\infty, \frac{3}{5}) \cup (\frac{5}{3}, \infty)$

- Disequazioni con più moduli.

  Se in un'equazione compare più di un'espressione in modulo, ad esempio $|f(x)| + |g(x)| \lesseqgtr k$, ci saranno intervalli di $\mathbb{R}$ in cui $f(x)$ è positivo e $g(x)$ negativo o viceversa e altri in cui sono entrambi positivi o entrambi negativi. Di conseguenza, per trovare le soluzioni occorre:

  – rappresentare graficamente i vari intervalli;
  – costruire l'unione di più sistemi relativo;
  – risolvere ciascun sistema.

  Esempi:

  (a) $|4 - x^2| - |3 - x| > x$

  Rappresentiamo graficamente le variazioni di segno dei due moduli. $4 - x^2$ è positivo per $-2 \leq x \leq 2$; $3 - x$ per $x \leq 3$:

  $$- - - - (-2) + + + + + + + + + + 2 - - - - - - - -$$
  $$+ 3 - - - - -$$

  Abbiamo quindi tre intervalli: per $x < -2$ o $2 < x \leq 3$ il primo modulo è negativo mentre il secondo è positivo; per $-2 \leq x \leq 2$ sono entrambi positivi; per $x > 3$ sono entrambi negativi.
  Scriviamo i sistemi associati alla disequazione:

  $$\begin{cases} x < -2 \text{ oppure } 2 < x \leq 3 \\ -(4 - x^2) - (3 - x) > x \end{cases} \cup \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ (4 - x^2) - (3 - x) > x \end{cases} \cup \begin{cases} x > 3 \\ -(4 - x^2) + (3 - x) > x \end{cases}$$

  Quindi,

  $$\begin{cases} (x < -2 \text{ oppure } 2 < x \leq 3 \\ -4 + x^2 - 3 + x - x > 0 \end{cases} \cup \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ 4 - x^2 - 3 + x - x > 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x > 3 \\ -4 + x^2 + 3 - x - x > 0 \end{cases}$$

  Semplifichiamo

  $$\begin{cases} (x < -2 \text{ oppure } 2 < x \leq 3 \\ x^2 > 7 \end{cases} \cup \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ x^2 < 1 \end{cases} \cup \begin{cases} x > 3 \\ x^2 - 2x - 1 > 0 \end{cases}$$

Ancora

$$\left\{\begin{array}{l}(x < -2 \text{ oppure } 2 < x \leq 3 \\ (x < -\sqrt{7} \text{ oppure } x > \sqrt{7}\end{array}\right. \cup \left\{\begin{array}{l}-2 \leq x \leq 2 \\ -1 < x < 1\end{array}\right. \cup$$

$$\cup \left\{\begin{array}{l}x > 3 \\ (x - (1-\sqrt{2}))(x-(1+\sqrt{2})) > 0\end{array}\right.$$

Dal primo sistema, poichè $2 < \sqrt{7} < 3$ si ottiene l'intervallo $(-\infty, -\sqrt{7}) \cup (\sqrt{7}, 3]$.
Dal secondo, $(-1, 1)$
Dal terzo, poichè $1 < \sqrt{2} < 2 \Rightarrow 1 + \sqrt{2} < 3$, si ottiene $x > 3$.
Mettendo tutto assieme, la disequazione ha soluzione per $x \in (-\infty, -\sqrt{7}) \cup (-1, 1) \cup (\sqrt{7}, \infty)$

4. **Equazioni e disequazioni irrazionali.**

- Equazioni.

  Un'equazione irrazionale è un'equazione in cui compaiono uno o più radicali aventi nel radicando l'incognita. Le tipologie più frequenti sono:

  (a) $\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$
  (b) $\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[m]{f(x)}$
  (c) $\sqrt[n]{f(x)} \pm \sqrt[m]{f(x)} = h(x)$

  E combinazioni di queste (equazioni con più di due radicali e termini razionali: equazioni radicali fratte).

  Se n è *dispari*, non ci sono particolari problemi: basta elevare alla n entrambi i membri e risolvere. Vale infatti:

  $$a = b \Longleftrightarrow a^n = b^n \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

  Se n è pari, la condizione non vale: $a^2 = 3^2 \nLeftrightarrow a = 3$. Il controesempio è $a = -3$. La proprietà vale se a, b sono concordi (cioè hanno lo stesso segno, entrambi positivi oppure entrambi negativi):

  $$a = b \Longleftrightarrow a^n = b^n \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, a, b \text{ concordi}$$

  .

  Per scartare soluzioni non valide che nascono dall'elevamento a potenza pari, è quindi necessario impostare dei sistemi per imporre che l'equazione sia verificata e che le basi siano concordi. In alternativa, si possono trovare tutte le soluzioni, e poi verificarle una ad una a posteriori. In alcuni casi quest'ultimo metodo può tornare utile, noi in generale facciamo riferimento al precedente.

Un'ultima considerazione: notate che in equazioni irrazionali, la base da elevare (e che crea problemi) è un radicale. Nel caso di radice pari, perchè l'esistenza del radicale sia garantita il radicando deve essere positivo. Quindi, per la risoluzione di equazioni irrazionali la concordanza delle basi coincide con la positività dei radicandi.

- Caso $\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$, n pari.

  In questo caso, la soluzione dell'equazione, per quanto appena detto coincide con la soluzione del sistema

$$\begin{cases} f(x) = [g(x)]^n \\ f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

  Si può facilmente dimostrare che poichè n è pari la prima e la terza condizione implicano la seconda, che è quindi superflua (provate come esercizio). Tuttavia, è inutile imparare un metodo di risoluzione diverso per ogni caso specifico. Una volta capito che quel che bisogna garantire per poter elevare a potenza pari è la concordanza delle basi, ciascun caso particolare diventa una semplice applicazione della proprietà generale. Il costo è un po' di conti in più.

  Esempio: $\sqrt{2 - x + (x-1)^2} + 2x - 1 = 0$

  Isoliamo il radicale:

$$\sqrt{2 - x + (x-1)^2} = 1 - 2x$$

  Ed ora impostiamo il sistema:

$$\begin{cases} 2 - x + (x-1)^2 = (1-2x)^2 \\ 2 - x + (x-1)^2 \geq 0 \\ 1 - 2x \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 - x + x^2 - 2x + 1 = 1 - 4x + 4x^2 \\ 2 - x + x^2 - 2x + 1 \geq 0 \\ x \leq \frac{1}{2} \end{cases} \implies \begin{cases} x^2 - 3x + 3 = 1 - 4x + 4x^2 \\ x^2 - 3x + 3 \geq 0 \\ x \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x^2 - x - 2 = 0 \\ x \leq \frac{1}{2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{6} \\ x \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Nel terzo passaggio sparisce la seconda equazione perchè sempre verificata (Nell'equazione $x^2 - 3x + 3$ il Δ è negativo ed il coefficiente di x^2 è positivo). Le soluzioni della prima equazioni sono $x_1 = 1$ ed $x_2 = -\frac{2}{3}$. x_1 non soddisfa la disequazione, quindi la soluzione è solo x_2

- Caso $\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[m]{g(x)}$, almeno uno fra n ed m pari.

  Per risolvere l'equazione dobbiamo elevare a destra e sinistra per un esponente, il minimo comune multiplo fra i m ed n, che elimini contemporaneamente entrambe le radici. Scartiamo il caso in cui n, m sono entrambi dispari, perchè elevando al mcm fra i due, la ricerca della soluzione non pone particolari problemi.

  Supponiamo, senza perdità di generalità, che sia n pari ed m dispari, e $m \cdot n$ il minimo comune multiplo*, occorre imporre $f(x) \geq 0$ per garantire l'esistenza del radicale, e $\sqrt[m]{g(x)} \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq 0$ per la concordanza dei segni. Il sistema è quindi ESATTAMENTE LO STESSO DEL CASO PRECEDENTE:

$$\begin{cases} [f(x)]^m = [g(x)]^n \\ f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

  Esempio: $\sqrt[3]{13x + 1} = \sqrt{4x + 1}$

  Eleviamo a destra e sinistra ad esponente 6, e poniamo la positività di entrambi i radicali:

$$\begin{cases} (13x + 1)^{\frac{6}{3}} = (4x + 1)^{\frac{6}{2}} \\ 13x + 1 \geq 0 \\ 4x + 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (13x + 1)^2 = (4x + 1)^3 \\ x \geq -\frac{1}{13} \\ x \geq -\frac{1}{4} \end{cases}$$

*Un'ipotesi fatta senza perdita di generalità signica che non farla condurrebbe alle stesse identiche conclusioni ad un costo in termini di calcoli superiore. E' piuttosto frequente in matematica. In questo caso, se fosse m l'esponente pari si potrebbe ripetere l'intero ragionamento sostituendo m ad n e $g(x)$ ad $f(x)$, e viceversa. Se il minimo comune multiplo fosse diverso da $m \cdot n$ scrivere la prima equazione sarebbe più complicato, ma non cambierebbe nulla nel ragionamento

Il cubo di un trinomio $f(x)^3$ si può calcolare (senza imparare nuove formule....) come $f(x)f(x)^2$. Quindi,
$(4x+1)^3 = (4x+1)(16x^2+8x+1) = 64x^3+32x^2+4x+16x^2+8x+1 = 64x^3+48x^2+12x+1$
Il sistema diventa

$$\begin{cases} 64x^3 - 121x^2 - 14x = 0 \\ x \geq -\frac{1}{13} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x(64x^2 - 121x - 14) = 0 \\ x \geq -\frac{1}{13} \end{cases}$$

Scomponendo in fattori il polinomio di secondo grado nell'equazione si trovano tre soluzioni, $x = 0; x = 2; x = -\frac{7}{64}$. La terza soluzione non rispetta la disequazione e va scartata.

Come nel caso precedente, si può verificare che se m è dispari e n pari la terza equazione del sistema, $g(x) \geq 0$, è ridondante.

Se m, n sono entrambi pari non cambia nulla nel sistema. Dobbiamo infatti sostituire la condizione che assicura la concordanza dei segni, $g(x) > 0$, con la condizione che assicura l'esistenza del radicale $\sqrt[m]{g(x)}$, che è ancora una volta $g(x) > 0$!

- equazioni del tipo $\sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)} = h(x)$.
  In questo caso la presenza di un termine razionale rende la condizione

  $$a = b \Longleftrightarrow a^n = b^n \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, a, b \text{ concordi}$$

  è difficile da imporre con un sistema come abbiamo fatto fino ad adesso.
  La strategia è quindi la seguente:
  - si eleva tutto al quadrato. Si ottiene così un'equazione con un solo radicale;
  - si risolve la nuova equazione con i metodi visti ai punti precedenti, ossia imponendo la concordanza dei segni tramite il solito sistema;
  - una volta trovate le (potenziali) soluzioni, si verifica a posteriori che soddifino l'equazione irrazionale di partenza.

Esempio: $\sqrt{x^2+1} - x = \sqrt{1-4x}$
Per prima cosa, eleviamo al quadrato entrambi i membri. Alla fine controlleremo che le soluzioni siano compatibili con l'equazione irrazionale in oggetto

$$(\sqrt{x^2+1} - x)^2 = (\sqrt{1-4x})^2$$
$$(x^2+1) - 2x\sqrt{x^2+1} + x^2 = 1 - 4x$$

Ora riordiniamo l'equazione in modo da ricondurci al caso $\sqrt{f(x)} = g(x)$:

$$2x^2 + 4x = 2x\sqrt{x^2+1}$$
$$x(x + 2 - \sqrt{x^2+1}) = 0$$

Una soluzione è $x = 0$; le altre derivano da

$$x + 2 - \sqrt{x^2+1} = 0$$
$$\sqrt{x^2+1} = x + 2$$

Ora, lo risolviamo come i casi che abbiamo già visto:

$$\begin{cases} x^2+1 = (x+2)^2 \\ x^2+1 \geq 0 \\ x+2 \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2+1 = x^2+4x+4 \\ x \geq -2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 4x = -3 \\ x \geq -2 \end{cases}$$

La prima disequazione sparisce perchè sempre verificata. Le due soluzioni sono quindi $x = 0$ ed $x = -\frac{3}{4}$.

- Altri tipi di equazioni.

  Visti i casi precedenti, dovrebbe essere chiaro che qualsiasi equazione irrazionale si può risolvere combinando i metodi precedenti, indipendentemente dal numero di radicali e dal loro grado presenti. Per affrontare le equazioni irrazionali in questo modo anzichè imparando i metodi di risoluzione speicifici di ciascun caso, occorre aver bene chiaro che se si hanno radicali con radice pari in un'equazione ciò che bisogna verificare è la condizione

$$a = b \Longleftrightarrow a^n = b^n \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, a, b \text{ concordi}$$

  Rimangono le equazioni irrazionali fratte. Ma, di nuovo, non dovrebbe essere un problema: si tratta semplicemente di imporre le condizioni di esistenza del denominatore e calcolare il denominatore comune per ricondursi ad un'equazione intera.

Esempio: $\frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}} = \frac{6}{\sqrt{x}}$
Poniamo le condizioni di esistenza per i denominatori e per i radicali. Le soluzioni dovranno soddisfare

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x - \sqrt{x} \neq 0 \\ \sqrt{x} \neq 0 \end{cases}$$

La terza disequazione è soddisfatta data la prima con la diseguaglianza stretta. La prima e la seconda, possono essere riscritte come

$$\begin{cases} x^2 \neq x \\ x > 0 \end{cases}$$

Tutto il sistema si riduce quindi alla condizione $x > 0$ ed $x \neq 1$.
Poichè abbiamo posto i denominatori diversi da zero possiamo calcolare il minimo comun denominatore e riscrivere l'equazione irrazionale come

$$\sqrt{x}(x + \sqrt{x}) = 6(x - \sqrt{x}) \rightarrow x\sqrt{x} + x = 6x - 6\sqrt{x} \rightarrow$$
$$5x = \sqrt{x}(6 + x)$$

Poichè $x > 0$ per le condizione viste prima, possiamo elevare entrambi i polinomi al quadrato senza problemi:

$$25x^2 = x(36 + 12x + x^2)$$

Dividendo per x (abbiamo posto $x \neq 0$) otteniamo

$$x^2 + 12x + 36 - 25x = 0$$
$$x^2 - 13x + 36 = 0$$

Risolvendo il trinomio, $x_1 = 4$; $x_2 = 9$. Entrambe le soluzioni rispettano le condizioni poste all'inizio e sono quindi accettabili.

- Disequazioni irrazionali.

  Risolvere una disequazione irrazionale è forse più semplice che risolvere un'equazione. Bisogna imporre l'esistenza dei radicali di grado pari e, come per le equazione, bisogna chiedersi cosa succede una volta che entrambi i membri vengono elevati ad una potenza n. Riflettiamo in particolare sul verso della disequazione:
  Se $f(x), g(x) \geq 0$, allora

$$\forall n, f(x) > g(x) \Rightarrow f(x)^n > g(x)^n$$

  Mentre se $f(x), g(x) < 0$,

$$\text{se } n \text{ pari}, f(x) > g(x) \Rightarrow f(x)^n < g(x)^n$$
$$\text{se } n \text{ dispari}, f(x) > g(x) \Rightarrow f(x)^n > g(x)^n$$

  Quindi, il verso della disequazione cambia solo se n è pari e i membri negativi. E' rilevante per le disequazioni irrazionali? No: Se $f(x) = \sqrt[n]{f(x)}$ ed n è pari la condizione di esistenza del radicale impone $f(x) \geq 0$. Quindi: se n è dispari si può elevare alla n senza nessun problema. Se n è pari, è rilevante solo la prima proprietà. Vediamo un po' di esempi, tenendo a mente quanto appena detto.

  Esempi:

  (a) $\sqrt{4x^2 + 3x - 1} > 2x + 3$

  Dobbiamo sempre imporre la condizione di esistenza $4x^2 + 3x - 1 \geq 0$. Il membro di destra può essere positivo o negativo. Se è positivo, siamo nelle condizioni della prima proprietà, e dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} 4x^2 + 3x - 1 > (2x+3)^2 \\ 4x^2 + 3x - 1 \geq 0 \\ 2x + 3 \geq 0 \end{cases}$$

  Ci possono essere altre soluzioni: la condizione di esistenza implica che il membro di sinistra è positivo. Se il membro di destra è negativo, basta verificare

$$\begin{cases} 4x^2 + 3x - 1 \geq 0 \\ 2x + 3 < 0 \end{cases}$$

  Le soluzioni saranno l'unione delle soluzioni dei due sistemi.

(b) $\sqrt{x-4} - \sqrt{2x+1} < 0$

Riordinando,

$$\sqrt{x-4} < \sqrt{2x+1}$$

Una volta poste le condizioni di esistenza, siamo nelle condizioni della prima proprietà e possiamo elevare al quadrato:

$$\begin{cases} x-4 < 2x+1 \\ x-4 > 0 \\ 2x+1 > 0 \end{cases}$$

In questo caso le condizioni di esistenza non permettono altri casi: entrambi i membri devono essere positivi.

(c) $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2} \geq 3$

In questo caso il membro di destra è un intero positivo. Poste le condizioni d'esistenza, possiamo elevare al quadrato.

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x-2 \geq 0 \\ (x+1) + 2\sqrt{x+1}\sqrt{x-2} + (x-2) \geq 9 \end{cases}$$

La terza disequazione è nuovamente irrazionale. Riordinando, ci troviamo in un caso analogo all'esempio (a):

$$\begin{cases} x \geq -1 \\ x \geq 2 \\ 2\sqrt{(x+1)(x-2)} \geq 9 - (x+1) - (x-2) \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 2\sqrt{(x+1)(x-2)} \geq 10 - 2x \end{cases}$$

Il radicando a sinistra è sicuramente positivo (lo garantiscono le condizioni d'esistenza poste all'inizio). Le soluzioni saranno quindi l'unione delle soluzioni di due sistemi:

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ 5-x \geq 0 \\ (x+1)(x-2) \geq (5-x)^2 \end{cases} \cup \begin{cases} x \geq 2 \\ 5-x < 0 \\ (x+1)(x-2) \geq 0 \end{cases}$$

5. **Equazioni e disequazioni logaritmiche ed esponenziali.**

- Equazioni logaritmiche.

  L'unica cosa da tener presente in equazioni logaritmiche (cioè equzioni che hanno una funzione dell'incognita alla base o all'argomento) è la definizione di logaritmo:

  - il logaritmo è definito solo per argomenti positivi;
  - il logaritmo è definito solo per basi positive e diverse da 1.

  Dalla definizione quindi si determinano le (eventuali) condizioni di esistenza. Per il resto, si tratta di applicare le proprietà dei logaritmi (come già fatto quando abbiamo definito la funzione logaritmo).

  Esempi:

  (a) $\log_3(x^2 - 2x) = 1$

  Condizioni di esistenza: $x^2 - 2x > 0 \Longrightarrow x(x-2) > 0 \Longrightarrow x < 0 \ \cup \ x > 2$.
  Applicando la definizione di logaritmo:

  $$\log_3(x^2 - 2x) = 1 \rightarrow 3^1 = x^2 - 2x$$

  (b) $2 \ln \sqrt{3x} = \ln(x^2 - 4)$

  Condizioni di esistenza: imponiamo sia quelle per il radicale che quelle per i logaritmi, $x > 0 \cup x^2 - 4 > 0$

  $$\ln \sqrt{3x}^2 = \ln(x^2 - 4) \rightarrow \sqrt{3x}^2 = (x^2 - 4) \rightarrow 3x = x^2 - 4$$

  (c) $\ln^3 x + 2 \ln^2 x - 3 \ln x = 0$
  Condizioni di esistenza: $x \geq 0$.
  Abbiamo già risolto equazioni di questo tipo: sostituiamo $t = \ln x$, risolviamo in t e alla fine risostituiamo $t = \ln x$

  $$t^3 + 2t^2 - 3t = 0$$

  Da qui in poi, non c'è nulla di nuovo.

- Equazioni esponenziali.

  In questo caso, poichè a^x è definita per $a \geq 0$ e ogni $x \in \mathbb{R}$ abbiamo gli stessi problemi di esistenza della radice quadrata (che è infatti l'esponenziale con esponente $\frac{1}{2}$).

La strategia è ridurre l'equazioni o all'eguaglianza di due esponenziali con la stessa base, e quindi applicare

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$$

Esempio:$2^{\frac{x+9}{1-x}} = \frac{1}{4}$
Condizioni di esistenza: $x \neq 1$

$$\begin{aligned} 2^{\frac{x+9}{1-x}} &= 2^{-2} \\ \frac{x+9}{1-x} &= -2 \end{aligned}$$

Se non fosse possibile, si applica lo stesso logaritmo a destra e sinistra in modo da ottenere un polinomio in x:

$$a^{f(x)} = b^{g(x)} \Leftrightarrow \log a^{f(x)} = \log b^{g(x)} \Longrightarrow f(x)\log a = g(x)\log b$$

Esempio: $4^x + 2^{2x-1} = 3^{x+1} + 3^{x-1}$

$$\begin{aligned} 2^{2x} + 2^{2x-1} &= 3^{x+1} + 3^{x-1} \\ 2^{2x-1}(2+1) &= 3^{x+1} + 3^{x-1}(3^2+1) \\ 3 \cdot 2^{2x-1} &= 10 \cdot 3^{x-1} \\ \log_3 3 + \log_3 2^{2x-1} &= \log_3 10 + \log_3 3^{x-1} \\ \log_3 3 + (2x-1)\log_3 2 &= \log_3 10 + x - 1 \end{aligned}$$

A questo punto si ha un polinomio in x.
La terza possibilità, di fronte ad un polinomio in a^x, è nuovamente risolvere per sostituzione.

Esempio: $2^{2x+1} - 2^x - 1 = 0$
Poniamo $t = 2^x$:

$$\begin{aligned} 2 \cdot (2^x)^2 - 2^x - 1 &= 0 \\ 2t^2 - t - 1 &= 0 \end{aligned}$$

- Disequazioni logaritmiche ed esponenziali.

  Non c'è nulla di nuovo nelle disequazioni logaritmiche ed esponenziali, una volta capito come si risolvono disequazioni generiche ed equazioni logaritmiche ed esponenziali. Bisogna solo fare attenzione al segno, ricordando che:

$$a > 1: \quad f(x) > g(x) \Leftrightarrow \begin{array}{c} \log_a f(x) > \log_a g(x) \\ \\ a^{f(x)} > a^{g(x)} \end{array}$$

$$0 < a < 1: \quad f(x) > g(x) \Leftrightarrow \begin{array}{c} \log_a f(x) < \log_a g(x) \\ \\ a^{f(x)} < a^{g(x)} \end{array}$$

6. **Esercizi svolti:**

   (a) $\frac{x^2-2}{4} + \frac{5}{6} < \frac{x}{4} - \frac{x^2-1}{3}$
   É ammesso qualsiasi valore di x, raccogliendo a fattore comune otteniamo
   $\frac{3x^2-6+10}{12} < \frac{3x-4x^2+4}{12}$
   $\frac{7x^2-3x}{12} < 0$
   $x(7x-3) < 0$, da cui si ottiene che $x \in \left(0, \frac{3}{7}\right)$

   (b) $\begin{cases} x^2 + 22x + 40 < 0 \\ 3x + 15 \geq 0 \\ x^2 + 3x \leq 0 \end{cases}$
   Risolvendo le tre disequazioni si ottengono i valori di ammissibilità
   $\begin{cases} x \in (-20, -2) \\ x \geq -5 \\ x \in [-3, 0] \end{cases}$
   l'intersezione dei tre insiemi è $x \in [-3, -2)$.

   Esercizi:

   (c) $|\frac{5}{2+x}| > 1$

   (d) $|x+2| < 1 + |x-1|$

   (e) $2\sqrt{2a^2 + ax + x^2} = 3a + x$

   (f) $\frac{x^2+2x+3}{x^2+2x-1} + 2 < \frac{x^2+2x+2}{x^2+2x-2}$